Matematikk 1T — Høst 2009 (eksempel)

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (22 poeng)

a) Pris på fotball og hockeykølle

Oppgave. Av to bilder leser vi: 1 fotball + 1 hockeykølle = 500 kr, og 3 fotballer + 2 hockeykøller = 1200 kr. Finn prisen på hver gjenstand.

Løsning. La b være prisen på en fotball og s prisen på en hockeykølle. Da er

$$\begin{aligned} b + s &= 500 \\ 3b + 2s &= 1200 \end{aligned}$$

Fra den første likningen er $s = 500 - b$. Sett inn i den andre:

$$3b + 2(500 - b) = 1200 \implies b + 1000 = 1200 \implies b = 200.$$

Da blir $s = 500 - 200 = 300$.

$$\boxed{\text{Fotball: 200 kr,} \quad \text{hockeykølle: 300 kr}}$$

b) Standardform

Oppgave. Regn ut $6{,}2 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^8$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi multipliserer tallene og legger sammen eksponentene:

$$6{,}2 \cdot 2{,}5 = 15{,}5, \qquad 10^4 \cdot 10^8 = 10^{12}.$$

$$6{,}2 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^8 = 15{,}5 \cdot 10^{12} = \boxed{1{,}55 \cdot 10^{13}}.$$

c) Lineær likning

Oppgave. Løs $4(x-1) = 5 + 3x - (x-1)$.

Løsning.

$$4x - 4 = 5 + 3x - x + 1 = 2x + 6.$$

$$4x - 2x = 6 + 4 \implies 2x = 10 \implies \boxed{x = 5}.$$

d) Logaritmelikning

Oppgave. Løs $3 \lg x = -6$ og skriv svaret som et desimaltall.

Løsning. Del på 3:

$$\lg x = -2 \implies x = 10^{-2} = \boxed{0{,}01}.$$

e) Regn ut

Oppgave. Regn ut $5 - 4^2 \cdot (4-3)^3 \cdot 2^{-3}$.

Løsning. Vi følger regnerekkefølgen (potenser før multiplikasjon):

$$4^2 = 16, \quad (4-3)^3 = 1^3 = 1, \quad 2^{-3} = \tfrac{1}{8}.$$

$$5 - 16 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{8} = 5 - 2 = \boxed{3}.$$

f) Forenkle

Oppgave. Skriv $\dfrac{(x+y)^2 - 4xy}{x-y}$ så enkelt som mulig.

Løsning. Utvid telleren med kvadratsetningen:

$$(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$$

Da forkortes brøken:

$$\frac{(x-y)^2}{x-y} = \boxed{x-y} \qquad (x \neq y).$$

g) Andregradslikning

Oppgave. Løs $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Løsning. Vi faktoriserer ved å finne to tall med produkt 6 og sum 5, nemlig 2 og 3:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \implies \boxed{x = 2 \text{ eller } x = 3}.$$

h) Sannsynlighet — akkurat én sekser

Oppgave. Du kaster to terninger. Hva er sannsynligheten for å få akkurat én sekser?

Løsning. Det er $6 \cdot 6 = 36$ like sannsynlige utfall. «Akkurat én sekser» betyr at den ene terningen viser 6 og den andre noe annet enn 6. Antall gunstige:

- sekser på terning 1, ikke-sekser på terning 2: $1 \cdot 5 = 5$ utfall,
- ikke-sekser på terning 1, sekser på terning 2: $5 \cdot 1 = 5$ utfall.

Til sammen $5 + 5 = 10$ gunstige utfall, så

$$P = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18} \approx 0{,}28}.$$

i) Stigningstall til tangenten

Oppgave. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Finn stigningstallet til tangenten i punktet $(1, f(1))$.

Løsning. Stigningstallet til tangenten er $f'(1)$. Vi deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6.$$

$$f'(1) = 3 - 10 + 6 = \boxed{-1}.$$

j) Skisse av graf fra fortegnsskjema

Oppgave. Et fortegnsskjema viser hvordan $g(x)$ og $g'(x)$ varierer med merkene $-3,\ 2,\ 4,\ 7$. Skisser hvordan grafen til g kan se ut.

Tolkning av skjemaet. Vi leser av:

- $g'(x)$**:** negativ for $x < 2$, lik null i $x = 2$, positiv for $2 < x < 7$, lik null i $x = 7$. (Definert fra $x = -3$.)
- $g(x)$**:** negativ for $x < 4$, lik null i $x = 4$, positiv for $x > 4$.

Hva forteller dette om grafen?

- $g'(x) = 0$ i $x = 2$ med fortegnsskift fra $-$ til $+$: grafen har et **bunnpunkt** i $x = 2$ (vannrett tangent, minimum).
- $g'(x) = 0$ i $x = 7$ med fortegnsskift fra $+$ til ...: grafen har vannrett tangent (et **toppunkt**) i $x = 7$.
- $g(x) = 0$ i $x = 4$: grafen **skjærer x-aksen** i $x = 4$ (fra negativ til positiv).

Skisse. Grafen kommer fra venstre (fra $x = -3$) og **synker** fram til bunnpunktet i $x = 2$ (der den er negativ). Deretter **stiger** den, krysser x-aksen i $x = 4$, fortsetter opp til et toppunkt i $x = 7$, og synker svakt etter det.

$$\boxed{\text{Bunnpunkt i } x = 2,\ \text{nullpunkt i } x = 4,\ \text{toppunkt i } x = 7.}$$

Konsistenssjekk: nullpunktene til g gir der grafen krysser x-aksen ($x = 4$), mens nullpunktene til g' gir vannrette tangenter ($x = 2$ og $x = 7$). Skissen stemmer med begge radene.

k) Trekant med $\angle B = 90^\circ$ og $\tan A = 1$

Oppgave. I trekant ABC er $\angle B = 90^\circ$ og $\tan A = 1$. Lag en figur og forklar hvordan trekanten kan se ut.

Løsning. Med rett vinkel i B er

$$\tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{BC}{AB} = 1 \implies BC = AB.$$

De to katetene er altså like lange. Da blir de spisse vinklene like store, og siden de til sammen utgjør 90°:

$$\angle A = \angle C = 45^\circ.$$

Trekanten er en **likebeint, rettvinklet trekant** (en «halv kvadrat»). Et eksempel er $AB = BC = 1$ med hypotenus $AC = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\angle A = \angle C = 45^\circ, \quad \angle B = 90^\circ, \quad AB = BC}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 2 (10 poeng)

Oppgave. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. a) Tegn grafen for $x \in [-10, 10]$. b) Finn definisjons- og verdimengde. c) En lineær funksjon g går gjennom $(-2, 0)$ og $(3, 5)$ — finn $g(x)$ og tegn i samme system. d) Løs $f(x) = g(x)$ med to ulike metoder.

a) Grafen til f

Vi skriver om f ved polynomdivisjon for å se asymptotene:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Grafen er en hyperbel med **vertikal asymptote** $x = 1$ og **horisontal asymptote** $y = 2$. Den skjærer aksene i origo ($f(0) = 0$). For $x \in [-10, 10]$ tegnes en gren under/venstre for $(1, 2)$ og en gren over/høyre for $(1, 2)$.

b) Definisjonsmengde og verdimengde

Nevneren $x - 1$ er null for $x = 1$, så

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle.$$

Siden $\dfrac{2}{x-1} \neq 0$ for alle x, kan f aldri bli nøyaktig 2:

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad V_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

c) Den lineære funksjonen g

Stigningstallet gjennom $(-2, 0)$ og $(3, 5)$:

$$a = \frac{5-0}{3-(-2)} = \frac{5}{5} = 1.$$

Med $g(x) = x + b$ og $g(-2) = 0$: $-2 + b = 0 \Rightarrow b = 2$.

$$\boxed{g(x) = x + 2}$$

Linjen går gjennom $(-2, 0)$ og $(3, 5)$ og tegnes i samme koordinatsystem som f.

d) Løs $f(x) = g(x)$ med to metoder

Metode 1 — grafisk. Skjæringspunktene mellom hyperbelen og linjen avleses til $x = -1$ og $x = 2$ (punktene $(-1, 1)$ og $(2, 4)$).

Metode 2 — ved regning.

$$\frac{2x}{x-1} = x + 2.$$

Vi multipliserer med $x - 1$ (og krever $x \neq 1$):

$$2x = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2.$$

$$0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \implies x = 2 \text{ eller } x = -1.$$

Begge ligger i D_f.

$$\boxed{x = -1 \text{ og } x = 2}$$

Oppgave 3 (8 poeng)

Oppgave. Mosjonsløypa følger omkretsen til firkant $ABCD$. Gitt: $AB = 761$ m, $DA = 362$ m, $DC = 498$ m, $\angle ADC = 95^\circ$ og $\angle BCD = 139^\circ$. a) Vis at diagonalen $AC \approx 641$ m. b) Finn $\angle DCA$. c) Finn $\angle B$. d) Hvor lang er hele løypa?

a) Diagonalen AC

I trekant ACD kjenner vi $DA = 362$, $DC = 498$ og mellomliggende vinkel $\angle ADC = 95^\circ$. Cosinussetningen gir

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cdot \cos(\angle ADC).$$

$$AC^2 = 362^2 + 498^2 - 2 \cdot 362 \cdot 498 \cdot \cos 95^\circ = 131044 + 248004 - 360552 \cos 95^\circ.$$

Med $\cos 95^\circ \approx -0{,}0872$ blir $-360552 \cos 95^\circ \approx 31\,420$, så

$$AC^2 \approx 410\,468 \implies AC \approx \boxed{641 \text{ m}}.$$

b) Vinkel $\angle DCA$

Vi bruker sinussetningen i trekant ACD:

$$\frac{\sin(\angle DCA)}{DA} = \frac{\sin(\angle ADC)}{AC} \implies \sin(\angle DCA) = \frac{362 \cdot \sin 95^\circ}{640{,}7} \approx 0{,}5628.$$

$$\angle DCA \approx \boxed{34{,}3^\circ}.$$

c) Vinkel B

Hele vinkelen ved C i firkanten er $\angle BCD = 139^\circ$, og denne er delt av diagonalen AC i $\angle DCA$ og $\angle ACB$:

$$\angle ACB = 139^\circ - 34{,}3^\circ = 104{,}7^\circ.$$

I trekant ABC kjenner vi nå $AB = 761$, $AC \approx 640{,}7$ og $\angle ACB \approx 104{,}7^\circ$. Sinussetningen gir

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin(\angle ACB)}{AB} \implies \sin B = \frac{640{,}7 \cdot \sin 104{,}7^\circ}{761} \approx 0{,}8141.$$

$$\angle B \approx \boxed{54{,}5^\circ}.$$

d) Lengden av hele løypa

Vi mangler bare BC. I trekant ABC er $\angle BAC = 180^\circ - 104{,}7^\circ - 54{,}5^\circ = 20{,}8^\circ$. Sinussetningen:

$$BC = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAC)}{\sin(\angle ACB)} = \frac{761 \cdot \sin 20{,}8^\circ}{\sin 104{,}7^\circ} \approx 279 \text{ m.}$$

Omkretsen (løypa) er $AB + BC + CD + DA$:

$$O = 761 + 279 + 498 + 362 = \boxed{1900 \text{ m}}.$$

Oppgave 4 (8 poeng)

Oppgave. Klasse 1A: 30 elever, 12 har kjemi, 21 har matematikk, 7 har begge. a) Venndiagram — hvor mange har verken? b) P(matematikk, men ikke kjemi). c) To tilfeldige elever — P(begge har matematikk). d) Klasse 1B har 4 matematikkelever; P(begge av to trukne har matematikk) $=$ 0,05. Hvor mange elever er i 1B?

a) Venndiagram og «verken»

- Bare kjemi: $12 - 7 = 5$
- Bare matematikk: $21 - 7 = 14$
- Begge: 7
- Verken: $30 - (5 + 7 + 14) = 30 - 26 = 4$

Et venndiagram med to overlappende sirkler (Matematikk og Kjemi) har 14 i bare-matte-feltet, 5 i bare-kjemi-feltet, 7 i snittet og 4 utenfor begge sirklene.

$$\boxed{\text{4 elever har verken matematikk eller kjemi}}$$

b) P(matematikk, men ikke kjemi)

14 av 30 har matematikk uten kjemi:

$$P = \frac{14}{30} = \boxed{\frac{7}{15} \approx 0{,}47}.$$

c) Begge av to trukne har matematikk

21 av 30 har matematikk. Vi trekker uten tilbakelegging:

$$P = \frac{21}{30} \cdot \frac{20}{29} = \frac{420}{870} = \boxed{\frac{14}{29} \approx 0{,}48}.$$

d) Antall elever i klasse 1B

La n være antall elever i 1B. Med 4 matematikkelever er sannsynligheten for to matematikkelever ved trekking uten tilbakelegging

$$\frac{4}{n}\cdot\frac{3}{n-1} = 0{,}05.$$

$$\frac{12}{n(n-1)} = 0{,}05 \implies n(n-1) = \frac{12}{0{,}05} = 240.$$

$$n^2 - n - 240 = 0 \implies n = \frac{1+\sqrt{1+960}}{2} = \frac{1+31}{2} = 16.$$

$$\boxed{\text{Det er 16 elever i klasse 1B.}}$$

Oppgave 5 (8 poeng)

> På eksamen skulle eleven velge **enten** Alternativ I **eller** Alternativ II; alternativene teller likt. Her løses begge.

Alternativ I

Oppgave. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. a) Tegn grafen og finn topp-/bunnpunkt. b) Stigningstall til linjen l gjennom topp- og bunnpunkt. c) Med m = gjennomsnittet av x-koordinatene til topp- og bunnpunkt: finn stigningstallet til tangenten t i $(m, f(m))$, og vis at $l : t = \frac{2}{3}$. d) Finn to andre tredjegradsfunksjoner med topp- og bunnpunkt, gjenta a)–c), og sett opp en hypotese.

a) Vi deriverer og finner ekstremalpunkter:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

$f'(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = 3$. Funksjonsverdiene:

$$f(1) = 1 - 6 + 9 - 1 = 3, \qquad f(3) = 27 - 54 + 27 - 1 = -1.$$

Siden $f''(x) = 6x - 12$ gir $f''(1) = -6 < 0$ og $f''(3) = 6 > 0$:

$$\boxed{\text{Toppunkt } (1,3), \quad \text{bunnpunkt } (3,-1)}$$

b) Stigningstallet til linjen l gjennom $(1,3)$ og $(3,-1)$:

$$a_l = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}.$$

c) Gjennomsnittet av x-koordinatene er $m = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Tangentens stigningstall:

$$a_t = f'(2) = 3(2-1)(2-3) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3.$$

Forholdet mellom stigningstallene:

$$\frac{a_l}{a_t} = \frac{-2}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

d) Vi prøver to nye tredjegradsfunksjoner:

Funksjon 1: $p(x) = x^3 - 3x$. Da er $p'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ for $x = \pm 1$, med punkter $(-1, 2)$ (topp) og $(1, -2)$ (bunn).

$$a_l = \frac{-2-2}{1-(-1)} = -2, \qquad m = 0, \quad a_t = p'(0) = -3, \qquad \frac{a_l}{a_t} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Funksjon 2: $q(x) = x^3 - 12x + 5$. Da er $q'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ for $x = \pm 2$, med punkter $(-2, 21)$ (topp) og $(2, -11)$ (bunn).

$$a_l = \frac{-11-21}{2-(-2)} = \frac{-32}{4} = -8, \qquad m = 0, \quad a_t = q'(0) = -12, \qquad \frac{a_l}{a_t} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}.$$

Hypotese. For enhver tredjegradsfunksjon med både topp- og bunnpunkt er forholdet mellom stigningstallet til linjen l (gjennom topp- og bunnpunkt) og tangenten t i midtpunktet alltid

$$\boxed{\frac{a_l}{a_t} = \frac{2}{3}}.$$

Alternativ II

> Hver oppgave kan løses ved regning, grafisk eller med digitale verktøy; her vises løsning ved regning (kontrollert med CAS).

a) Likningssystem. $x^2 + y^2 = 25$ og $7y - x = 25$.

Fra den andre: $x = 7y - 25$. Sett inn:

$$(7y-25)^2 + y^2 = 25 \implies 49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25,$$

$$50y^2 - 350y + 600 = 0 \implies y^2 - 7y + 12 = 0 \implies (y-3)(y-4) = 0.$$

- $y = 3 \Rightarrow x = 7 \cdot 3 - 25 = -4$
- $y = 4 \Rightarrow x = 7 \cdot 4 - 25 = 3$

$$\boxed{(x, y) = (-4, 3) \quad \text{og} \quad (3, 4)}$$

(Grafisk: skjæring mellom sirkelen med radius 5 og linjen $y = \frac{x+25}{7}$ gir de samme punktene.)

b) Ulikhet. $6x^2 - 11x + 3 \geq 0$.

Nullpunkter med abc-formelen:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12} \implies x = \frac{1}{3} \text{ eller } x = \frac{3}{2}.$$

Parabelen åpner oppover, så uttrykket er ≥ 0 **utenfor** nullpunktene:

$$\boxed{x \leq \tfrac{1}{3} \quad \text{eller} \quad x \geq \tfrac{3}{2}}.$$

c) Logaritmelikning. $\lg(x - 3) = 3 + \lg 2$.

Vi samler logaritmene: $3 = \lg 1000$, så høyresiden er $\lg(1000 \cdot 2) = \lg 2000$. Da:

$$\lg(x - 3) = \lg 2000 \implies x - 3 = 2000 \implies \boxed{x = 2003}.$$

(Vilkår: $x - 3 > 0$, oppfylt.)

d) Én løsning. $ax^2 + 3x + 1 = x - 2$.

Vi samler alt på én side:

$$ax^2 + 3x + 1 - x + 2 = 0 \implies ax^2 + 2x + 3 = 0.$$

For at en **andregradslikning** ($a \neq 0$) skal ha nøyaktig én løsning, må diskriminanten være null:

$$2^2 - 4 \cdot a \cdot 3 = 0 \implies 4 - 12a = 0 \implies a = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{a = \tfrac{1}{3}}$$

(Med $a = \frac{1}{3}$ blir likningen $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0$, dvs. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0$, som har dobbeltroten $x = -3$ — altså bare én løsning.)

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.