Matematikk 1T — Høst 2010

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

a) Løs likningssystemet $x + y = 4$ og $3x - y = 8$.

Vi legger sammen de to likningene for å fjerne y:

$$(x + y) + (3x - y) = 4 + 8 \implies 4x = 12 \implies x = 3.$$

Setter $x = 3$ inn i $x + y = 4$: $y = 4 - 3 = 1$.

$$\boxed{x = 3, \quad y = 1}$$

b) Løs likningen $-\frac{1}{4}x + 2 = 2x - \frac{5}{2}$.

1) Grafisk. Tegn de to rette linjene

$$y_1 = -\tfrac{1}{4}x + 2 \qquad \text{og} \qquad y_2 = 2x - \tfrac{5}{2}$$

i samme koordinatsystem. Linjen y_1 har skjæring 2 med y-aksen og synker svakt; y_2 har skjæring $-\frac{5}{2}$ og stiger bratt. Linjene krysser hverandre i $x = 2$ (med $y = \frac{3}{2}$). Løsningen avleses som x-koordinaten til skjæringspunktet:

$$\boxed{x = 2}$$

2) Ved regning. Vi ganger hele likningen med 4 for å fjerne brøkene:

$$-x + 8 = 8x - 10 \implies 8 + 10 = 8x + x \implies 18 = 9x \implies \boxed{x = 2}.$$

c) Regn ut $5{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}0 \cdot 10^3$ og skriv på standardform.

Vi gjør om til samme tierpotens før vi legger sammen:

$$5{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}0 \cdot 10^3 = 57\,000 + 3\,000 = 60\,000.$$

På standardform (ett siffer foran komma):

$$\boxed{6{,}0 \cdot 10^4}$$

d) Trekk sammen $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{24}{x^2-16}$.

Vi faktoriserer nevneren med konjugatsetningen: $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$. Felles nevner blir $(x+4)(x-4)$:

$$\frac{3}{x+4} + \frac{24}{(x+4)(x-4)} = \frac{3(x-4)}{(x+4)(x-4)} + \frac{24}{(x+4)(x-4)} = \frac{3x-12+24}{(x+4)(x-4)} = \frac{3x+12}{(x+4)(x-4)}.$$

Telleren $3x + 12 = 3(x+4)$, så vi forkorter mot $(x+4)$:

$$\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \boxed{\frac{3}{x-4}} \qquad (x \neq -4,\ x \neq 4).$$

e) Løs ulikheten $x^2 + 2x - 8 \geq 0$.

Nullpunktene til $x^2 + 2x - 8$ finner vi med abc-formelen:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \implies x = -4 \text{ eller } x = 2.$$

Altså $x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er positivt (eller null) *utenfor* nullpunktene:

$$\boxed{x \leq -4 \quad \text{eller} \quad x \geq 2}$$

f) Tegn en rettvinklet trekant ABC der $\tan C = \frac{5}{12}$.

Tangens til en spiss vinkel er forholdet mellom motstående og hosliggende katet:

$$\tan C = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{5}{12}.$$

Vi tegner derfor en rettvinklet trekant med den rette vinkelen i B, der vinkel C har - motstående katet $AB = 5$, - hosliggende katet $BC = 12$.

Hypotenusen blir da $AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

```
A
|\
| \
5 |  \  13
|   \
B----C
  12
```

$$\boxed{\text{Rettvinklet i } B,\ AB = 5,\ BC = 12,\ AC = 13}$$

g) Twistpose med 25 biter, Per liker 16. Vi trekker 2 tilfeldig.

1) Per liker begge. Vi trekker uten tilbakelegging. Sannsynligheten for at den første liker (16 av 25) ganget med at den andre også liker (15 av 24 igjen):

$$P(\text{begge}) = \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{240}{600} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}40}.$$

2) Per liker bare én. Enten «liker, liker-ikke» eller «liker-ikke, liker». De to rekkefølgene gir samme sannsynlighet, så vi ganger med 2:

$$P(\text{bare én}) = 2 \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{9}{24} = 2 \cdot \frac{144}{600} = \frac{288}{600} = \boxed{\frac{12}{25} = 0{,}48}.$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen er $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7$. Den deriverte er

$$f'(x) = x^2 - 2x.$$

a) Momentan vekstfart i $x = 1$.

$$f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = \boxed{-1}.$$

Grafen synker i punktet (f avtar med fart 1 per enhet).

b) Gjennomsnittlig vekstfart fra $x = 0$ til $x = 3$. Ekstremalpunkt i $[0, 3]$?

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{7 - 7}{3} = \boxed{0}.$$

Her er $f(0) = 7$ og $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 7 = 9 - 9 + 7 = 7$.

Begrunnelse: Ja, vi kan slutte at grafen har minst ett ekstremalpunkt i $[0, 3]$. Den gjennomsnittlige vekstfarten er 0, men funksjonen er ikke konstant (i a) fant vi $f'(1) = -1 \neq 0$). Da må grafen først synke og siden stige (eller omvendt) for å komme tilbake til samme verdi. Et sted i intervallet skifter den deriverte fortegn, og der ligger et ekstremalpunkt.

c) Topp- og bunnpunkter ved regning.

Vi setter $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

Vi bruker fortegnsskjema for $f'(x) = x(x-2)$ (parabel som åpner opp, nullpunkt 0 og 2): - $x < 0$: $f' > 0$ (stiger) - $0 < x < 2$: $f' < 0$ (synker) - $x > 2$: $f' > 0$ (stiger)

Så $x = 0$ gir et **toppunkt** og $x = 2$ gir et **bunnpunkt**. Funksjonsverdiene:

$$f(0) = 7, \qquad f(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 8 - 4 + 7 = \tfrac{8}{3} + 3 = \tfrac{17}{3} \approx 5{,}7.$$

$$\boxed{\text{Toppunkt } (0,\, 7) \qquad \text{Bunnpunkt } \left(2,\, \tfrac{17}{3}\right)}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen $T(x) = 100 \cdot 0{,}5^{\,x/5730}$ viser hvor mange prosent av opprinnelig C-14 som er igjen x år etter at planten døde.

a) Tegn grafen til T for $x \in [0,\, 12000]$.

Grafen er en synkende eksponentialkurve som starter i $T(0) = 100\,\%$ og avtar mot 0. Noen holdepunkter:

x (år)	0	5730	11460	12000
$T(x)$ (%)	100	50	25	$\approx 23{,}4$

Kurven er bratt i starten og flater ut mot høyre (halveres for hver 5730. år).

b) Hvor lang tid tar det før mengden er halvert?

Halvert betyr $T(x) = 50$:

$$100 \cdot 0{,}5^{\,x/5730} = 50 \implies 0{,}5^{\,x/5730} = 0{,}5 \implies \frac{x}{5730} = 1 \implies x = 5730.$$

$$\boxed{5730 \text{ år}}$$

Dette er nettopp halveringstiden til C-14, slik formelen er bygget opp.

c) Hvor gammel var brønnen? (Treverket inneholdt 86,5 % C-14.)

Vi løser $T(x) = 86{,}5$:

$$100 \cdot 0{,}5^{\,x/5730} = 86{,}5 \implies 0{,}5^{\,x/5730} = 0{,}865.$$

Tar logaritmen på begge sider:

$$\frac{x}{5730} \cdot \ln 0{,}5 = \ln 0{,}865 \implies x = 5730 \cdot \frac{\ln 0{,}865}{\ln 0{,}5} \approx 5730 \cdot 0{,}2093 \approx 1199.$$

$$\boxed{x \approx 1200 \text{ år}}$$

Brønnen var altså omtrent 1200 år gammel da målingene ble gjort.

Oppgave 4 (6 poeng)

a) Hvor høy er flaggstanga? (Avstand $10{,}0$ m, vinkel $51{,}3^\circ$.)

Vi har en rettvinklet trekant der den hosliggende kateten til vinkelen er 10,0 m (avstanden langs bakken), og høyden h er den motstående kateten. Da bruker vi tangens:

$$\tan 51{,}3^\circ = \frac{h}{10{,}0} \implies h = 10{,}0 \cdot \tan 51{,}3^\circ \approx 10{,}0 \cdot 1{,}248 \approx 12{,}5.$$

$$\boxed{h \approx 12{,}5 \text{ m}}$$

b) Hvor langt er det fra A til B? ($AC = 40{,}0$ m, $\angle A = 69{,}7^\circ$, $\angle C = 94{,}9^\circ$.)

I trekant ABC er vinkelsummen 180°, så

$$\angle B = 180^\circ - 69{,}7^\circ - 94{,}9^\circ = 15{,}4^\circ.$$

Vi bruker sinussetningen. Siden AB ligger motstående $\angle C$, og AC ligger motstående $\angle B$:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \implies AB = AC \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = 40{,}0 \cdot \frac{\sin 94{,}9^\circ}{\sin 15{,}4^\circ} \approx 40{,}0 \cdot \frac{0{,}9963}{0{,}2656} \approx 150.$$

$$\boxed{AB \approx 150 \text{ m}}$$

c) Areal av trekanten med sider 20, 24 og 14 m.

Vi har tre sider, så vi bruker Herons formel. Halve omkretsen er

$$s = \frac{20 + 24 + 14}{2} = 29.$$

Arealet blir

$$A = \sqrt{s(s-20)(s-24)(s-14)} = \sqrt{29 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 15} = \sqrt{19575} \approx 139{,}9.$$

$$\boxed{A \approx 140\ \mathrm{m}^2}$$

Oppgave 5 (8 poeng)

Idrettslaget har 240 medlemmer; 45 % er kvinner; 63 menn ønsker ballbinge; til sammen 110 ønsker ikke ballbinge.

a) Fyll inn tabellen.

Vi regner ut hjelpetall: - Kvinner: $0{,}45 \cdot 240 = 108$. Menn: $240 - 108 = 132$. - Ønsker ballbinge totalt: $240 - 110 = 130$. - Kvinner som ønsker: $130 - 63 = 67$. - Menn som ikke ønsker: $132 - 63 = 69$. Kvinner som ikke ønsker: $108 - 67 = 41$.

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge	63	67	130
Ønsker ikke ballbinge	69	41	110
Totalt	132	108	240

b) Sannsynligheten for at et tilfeldig medlem ønsker ballbinge.

$$P(\text{ønsker}) = \frac{130}{240} = \frac{13}{24} \approx \boxed{0{,}54}.$$

c) Medlemmet ønsker ballbinge — finn $P(\text{mann} \mid \text{ønsker})$.

Vi ser nå bare på de 130 som ønsker ballbinge; av disse er 63 menn:

$$P(\text{mann} \mid \text{ønsker}) = \frac{63}{130} \approx \boxed{0{,}48}.$$

d) Hvor mange nye «ja»-medlemmer må verves for at minst 75 % skal ønske ballbinge?

La x være antall nye medlemmer som ønsker ballbinge. Da blir antall som ønsker $130 + x$ og totalt antall $240 + x$. Kravet er

$$\frac{130 + x}{240 + x} \geq 0{,}75.$$

Vi ganger opp (nevner er positiv):

$$130 + x \geq 0{,}75(240 + x) = 180 + 0{,}75x \implies 0{,}25x \geq 50 \implies x \geq 200.$$

$$\boxed{\text{Minst 200 nye medlemmer}}$$

Kontroll: $\dfrac{130 + 200}{240 + 200} = \dfrac{330}{440} = 0{,}75$. ✓

Oppgave 6 (6 poeng)

a) Les av fast månedspris og minuttpris fra grafen.

Grafen er en rett linje. Skjæringen med y-aksen er den faste månedsprisen (kostnad ved 0 minutter):

$$\text{Fast månedspris} = 80 \text{ kr.}$$

Stigningstallet er minuttprisen. Fra (0, 80) til (500, 330):

$$\text{Pris per minutt} = \frac{330 - 80}{500 - 0} = \frac{250}{500} = 0{,}50 \text{ kr/min.}$$

$$\boxed{\text{Fast pris 80 kr,} \quad \text{0,50 kr per minutt}}$$

b) Tegn grafer for abonnement A, B og C ($0 \leq x \leq 500$).

Kostnadsfunksjonene blir:

$$A(x) = 1{,}59x$$

$$B(x) = \begin{cases} 100, & 0 \leq x \leq 100 \\ 100 + 1{,}19(x - 100), & x > 100 \end{cases}$$

$$C(x) = 250 + 0{,}49x$$

Holdepunkter for tegning:

x (min)	0	100	300	500
A	0	159	477	795
B	100	100	338	576
C	250	299	397	495

A er en rett linje gjennom origo, B er vannrett fram til 100 min og stiger så, og C er en rett linje som starter høyt men stiger sakte.

c) Når lønner hvert abonnement seg?

Vi finner skjæringspunktene mellom grafene.

A billigst for små x. A starter i 0. A er lik B (som er 100 fram til 100 min) når

$$1{,}59x = 100 \implies x = \frac{100}{1{,}59} \approx 62{,}9 \text{ min.}$$

B billigst i midten. B er lik C for $x > 100$:

$$100+1{,}19(x-100) = 250+0{,}49x \implies 1{,}19x-19 = 250+0{,}49x \implies 0{,}70x = 269 \implies x \approx 384{,}3 \text{ min.}$$

Konklusjon (avrundet til hele minutter):

A lønner seg for $0 \le x \lesssim 63$ min
B lønner seg for $63 \lesssim x \lesssim 384$ min
C lønner seg for $x \gtrsim 384$ min

Oppgave 7 (4 poeng)

95 % av elevene har Facebook. Vi velger 25 elever tilfeldig. Med $p = 0{,}95$ og $n = 25$ er antall elever med profil binomisk fordelt.

a) Sannsynligheten for at alle 25 har profil.

$$P(\text{alle } 25) = 0{,}95^{25} \approx \boxed{0{,}277}.$$

b) Sannsynligheten for at flere enn 20 har profil.

«Flere enn 20» betyr $X = 21, 22, 23, 24$ eller 25. Med binomisk formel $P(X = k) = \binom{25}{k}\, 0{,}95^k\, 0{,}05^{\,25-k}$:

$$P(X > 20) = \sum_{k=21}^{25} \binom{25}{k} 0{,}95^k\, 0{,}05^{\,25-k} \approx 0{,}9928.$$

$$\boxed{P(X > 20) \approx 0{,}99}$$

Vi kan også regne det ut med en kommandolinje eller lommeregner:

Program (Python):

```python
from math import comb
n, p = 25, 0.95
P = sum(comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k) for k in range(21, 26))
print(round(P, 4))   # 0.9928
```

Program (C++):

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
long long komb(int n, int k) {              // binomialkoeffisient
    long long r = 1;
    for (int i = 1; i <= k; ++i) r = r * (n - i + 1) / i;
    return r;
}
int main() {
    int n = 25; double p = 0.95, P = 0.0;
    for (int k = 21; k <= 25; ++k)
        P += komb(n, k) * std::pow(p, k) * std::pow(1 - p, n - k);
    std::cout << P << "\n";                  // 0.992835
    return 0;
}
```

Oppgave 8 (6 poeng)

I denne oppgaven velger man **enten** alternativ I **eller** alternativ II. Begge er løst her.

Alternativ I

Funksjonen er $f(x) = -2x^2 + ax + 4$.

a) Finn $f'(x)$ og toppunktet når $a = 2$.

$$f'(x) = -4x + a.$$

Med $a = 2$: $f'(x) = -4x + 2$. Toppunktet ligger der $f'(x) = 0$:

$$-4x + 2 = 0 \implies x = \tfrac{1}{2}.$$

Koeffisienten foran x^2 er negativ, så grafen har et toppunkt her. y-verdien:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -2 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 = -\tfrac{1}{2} + 1 + 4 = \tfrac{9}{2}.$$

$$\boxed{\text{Toppunkt } \left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{9}{2}\right)}$$

b) Bestem a slik at x-koordinaten til toppunktet er -1. Toppunktet ligger der $f'(x) = 0$, altså $-4x + a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{4}$. Vi krever $x = -1$:

$$\frac{a}{4} = -1 \implies \boxed{a = -4}.$$

c) For hvilken a er y-koordinaten til toppunktet lavest? x-koordinaten er $x = \dfrac{a}{4}$. Vi setter inn i f for å finne y-verdien til toppunktet som funksjon av a:

$$y_{\text{top}} = f(\tfrac{a}{4}) = -2 \cdot \frac{a^2}{16} + a \cdot \frac{a}{4} + 4 = -\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + 4 = \frac{a^2}{8} + 4.$$

Dette er en parabel i a som åpner oppover, med minste verdi når a^2 er minst, altså $a = 0$:

$$\boxed{a = 0} \qquad \text{(da blir } y_{\text{top}} = 4).$$

Alternativ II

a) Er trekanten med sider 27, 20 og 12 cm rettvinklet? Vi sjekker den omvendte Pytagoras med den lengste siden (27) som mulig hypotenus:

$$27^2 = 729, \qquad 20^2 + 12^2 = 400 + 144 = 544.$$

Siden $729 \neq 544$, er trekanten **ikke** rettvinklet. (Fordi $729 > 544$ er den største vinkelen større enn 90°, altså stump.)

$$\boxed{\text{Nei, trekanten er ikke rettvinklet.}}$$

b) Rettvinklet trekant av 6,0 m stang, én katet 2,0 m. Hele stanga blir omkretsen, så $a + b + c = 6{,}0$ med $a = 2{,}0$ (katet), b den andre kateten og c hypotenusen. Da er $b + c = 4{,}0$, altså $c = 4 - b$. Pytagoras gir

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies 2^2 + b^2 = (4 - b)^2 = 16 - 8b + b^2.$$

$$4 = 16 - 8b \implies 8b = 12 \implies b = 1{,}5.$$

Da blir $c = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$.

$$\boxed{\text{De to andre sidene er 1,5 m og 2,5 m.}}$$

c) Trekant av 6,0 m stang med én vinkel 120° og en tilstøtende side 2,0 m. La de to sidene som danner 120°-vinkelen være 2,0 m og y, og den tredje siden (motstående 120°) være z. Omkretsen er 6,0, så $2 + y + z = 6 \Rightarrow z = 4 - y$. Cosinussetningen for siden z mot vinkelen 120°:

$$z^2 = 2^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y \cdot \cos 120^\circ.$$

Med $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ blir det

$$z^2 = 4 + y^2 + 2y.$$

Setter $z = 4 - y$:

$$(4-y)^2 = 4 + y^2 + 2y \implies 16 - 8y + y^2 = 4 + y^2 + 2y \implies 12 = 10y \implies y = 1{,}2.$$

Da blir $z = 4 - 1{,}2 = 2{,}8$.

$$\boxed{\text{De to andre sidene er 1,2 m og 2,8 m.}}$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.