

Matematikk 1T — Høst 2011

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (14 poeng)

a) Forenkle $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25}$

Løsning. Faktoriser teller og nevner. Telleren er en konjugatsetning, og nevneren er et fullstendig kvadrat:

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)^2} = \boxed{\frac{x - 5}{x + 5}} \quad (x \neq -5).$$

b) Løs likningen $3^{2x-1} = 1$

Løsning. Siden $3^0 = 1$, må eksponenten være null:

$$2x - 1 = 0 \implies x = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

c) Forenkle $\frac{a^{1/4} \cdot \sqrt{a}}{(a^{3/4})^3 \cdot a^{-2}}$

Løsning. Skriv alt som potenser av a og bruk potensreglene. Telleren:

$$a^{1/4} \cdot a^{1/2} = a^{1/4+1/2} = a^{3/4}.$$

Nevneren:

$$(a^{3/4})^3 \cdot a^{-2} = a^{9/4} \cdot a^{-2} = a^{9/4-2} = a^{1/4}.$$

Dermed

$$\frac{a^{3/4}}{a^{1/4}} = a^{3/4-1/4} = a^{1/2} = \boxed{\sqrt{a}}.$$

d) Bestem høyden h i trekant ABC

Oppgave. I trekant ABC er $AB = 5,0$, $AC = 3,0$ og $BC = 4,0$. h er høyden fra C ned på AB .

Løsning. Først sjekker vi at trekanten er rettvinklet ved C :

$$AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = AB^2,$$

så vinkelen ved C er 90° (omvendt Pytagoras), i samsvar med figuren.

Arealet kan da regnes på to måter — enten med de to katetene, eller med grunnlinjen AB og høyden h :

$$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h.$$

Det gir

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h \implies 6 = \frac{5}{2} h \implies h = \frac{12}{5} = \boxed{2,4}.$$

e) Løs ulikhetene grafisk

Oppgave. Av figuren leser vi at f er en parabel med nullpunkter $x = 1$ og $x = 3$ (gjennom $(0, 3)$), og g er en rett linje gjennom $(-3, 0)$, $(0, 3)$ og $(5, 8)$. Grafene skjærer hverandre i $(0, 3)$ og $(5, 8)$.

1) $f(x) \leq 0$. Parabellen ligger på eller under x -aksen mellom nullpunktene sine:

$$\boxed{x \in [1, 3]}.$$

2) $f(x) > g(x)$. Parabellen ligger over linjen til venstre for det første skjæringspunktet og til høyre for det andre. Skjæringene er i $x = 0$ og $x = 5$, så

$$\boxed{x < 0 \text{ eller } x > 5}.$$

(Kontroll med uttrykkene $f(x) = x^2 - 4x + 3$ og $g(x) = x + 3$: $f(x) - g(x) = x^2 - 5x = x(x - 5)$, som er positiv nettopp for $x < 0$ og $x > 5$.)

f) Bestem lengden av AC

Oppgave. I trekant ABC er $\angle A = 90^\circ$, $AB = 3,0$ og $\tan C = 2$.

Løsning. Vinkel C har AB som motstående katet og AC som hosliggende katet:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{AC} = 2 \implies AC = \frac{3}{2} = \boxed{1,5}.$$

g) Sannsynlighet ved trekking av to tusjer

Oppgave. Line har 3 blå, 2 røde og 1 grønn tusj (6 til sammen). Hun trekker tilfeldig to tusjer (uten tilbakelegging).

Antall måter å trekke 2 av 6 på:

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

1) **Ikke den grønne.** Da trekkes begge blant de 5 ikke-grønne:

$$P(\text{ikke grønn}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

2) **Én blå og én rød.** Antall gunstige er $\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 3 \cdot 2 = 6$:

$$P(\text{én blå og én rød}) = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

h) Vis med definisjonen av den deriverte at $f'(x) = 2x$ når $f(x) = x^2 + 1$

Løsning. Bruk grenseverdidefinisjonen:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi regner telleren:

$$f(x+h) - f(x) = [(x+h)^2 + 1] - [x^2 + 1] = x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 = 2xh + h^2.$$

Dermed

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Når $h \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \boxed{2x}.$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen er $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

a) Vis at grafen ikke har nullpunkter

Løsning. Nullpunkter krever $f(x) = 0$. Diskriminanten til $-x^2 + 2x - 2$ er

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 < 0.$$

Siden diskriminanten er negativ, finnes ingen reelle løsninger, og grafen har ingen nullpunkter.
(Grafen ligger helt under x -aksen, fordi $a = -1 < 0$.)

b) Finn ekstremalpunktet ved hjelp av $f'(x)$, og tegn grafen

Løsning. Deriver:

$$f'(x) = -2x + 2.$$

Ekstremalpunkt der $f'(x) = 0$:

$$-2x + 2 = 0 \implies x = 1.$$

Funksjonsverdien er $f(1) = -1 + 2 - 2 = -1$. Siden $a = -1 < 0$, er dette et **toppunkt**:

$$\boxed{(1, -1)}.$$

Graf. Parabelen vender ned, har toppunkt $(1, -1)$ og skjærer y -aksen i $f(0) = -2$. Et speilpunkt om symmetrilinjen $x = 1$ er $(2, -2)$. Tegn en nedovervendt parabel gjennom disse punktene; hele grafen ligger under x -aksen.

c) Bestem likningen for tangenten i punktet $(2, -2)$

Løsning. Stigningstallet til tangenten er den deriverte i $x = 2$:

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2.$$

Tangenten gjennom $(2, -2)$ med stigningstall -2 :

$$y - (-2) = -2(x - 2) \implies y = -2x + 4 - 2,$$

$$\boxed{y = -2x + 2}.$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Tilnærmet regel: $F = 2C + 30$. Nøyaktig regel: $5F = 9C + 160$.

a) Gjør om 100°C , og finn differansen

Tilnærmet:

$$F = 2 \cdot 100 + 30 = \boxed{230^\circ\text{F}}.$$

Nøyaktig: $5F = 9 \cdot 100 + 160 = 1060 \Rightarrow F = \frac{1060}{5} = \boxed{212^\circ\text{F}}.$

Differanse:

$$230 - 212 = \boxed{18^\circ\text{F}}.$$

Den tilnærmede regelen gir altså 18 grader for mye ved 100°C .

b) Løs likningssystemet, og tolk løsningen

Løsning. Sett inn $F = 2C + 30$ i den nøyaktige regelen:

$$5(2C + 30) = 9C + 160 \Rightarrow 10C + 150 = 9C + 160 \Rightarrow C = 10.$$

Da er $F = 2 \cdot 10 + 30 = 50$. Løsningen er

$$\boxed{C = 10, \quad F = 50}.$$

Tolkning. De to reglene gir samme svar bare ved $C = 10^\circ\text{C}$ (som tilsvarer 50°F). Dette er det eneste punktet der den tilnærmede regelen er helt nøyaktig; for alle andre temperaturer avviker den (og avviket vokser jo lenger unna 10°C vi kommer).

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 4 (8 poeng)

a) Vis at trekanten med sider 4,0, 5,0 og 6,0 cm ikke er rettvinklet

Løsning. Hvis trekanten var rettvinklet, måtte Pytagoras gjelde for den lengste siden (6). Men

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 36 = 6^2.$$

Siden $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, er trekanten $\boxed{\text{ikke rettvinklet}}$.

b) Bestem arealet

Løsning. Vi finner først vinkelen C mellom sidene 4 og 5 (motstående side 6) med cosinussetningen:

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{41 - 36}{40} = \frac{5}{40} = 0,125 \Rightarrow C \approx 82,82^\circ.$$

Arealet:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin C = 10 \cdot \sin 82,82^\circ \approx \boxed{9,9 \text{ cm}^2}.$$

(Kontroll med Herons formel, $s = \frac{4+5+6}{2} = 7,5$: $A = \sqrt{7,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5} \approx 9,92 \text{ cm}^2$.)

c) **Største areal med sider 7,0 cm og 11,0 cm**

Løsning. Med to faste sider $a = 7$ og $b = 11$ og mellomliggende vinkel v er arealet

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 11 \cdot \sin v = 38,5 \sin v.$$

Dette er størst når $\sin v = 1$, altså når $v = 90^\circ$ (rettvinklet trekant):

$$A_{\max} = 38,5 \cdot 1 = \boxed{38,5 \text{ cm}^2}.$$

d) **Vis hvordan trekanten kan se ut når arealet er 30 cm²**

Løsning. Sett arealet lik 30:

$$38,5 \sin v = 30 \implies \sin v = \frac{30}{38,5} = \frac{60}{77} \approx 0,779.$$

Likningen $\sin v = 0,779$ har **to** løsninger i en trekant:

$$v_1 \approx 51,2^\circ \quad \text{eller} \quad v_2 \approx 128,8^\circ.$$

Begge gir gyldige trekanter. Den tredje siden c finner vi med cosinussetningen, $c^2 = 7^2 + 11^2 - 2 \cdot 7 \cdot 11 \cos v$:

- **Spiss trekant:** $v_1 \approx 51,2^\circ$ gir $c \approx \sqrt{170 - 154 \cos 51,2^\circ} \approx 8,6 \text{ cm}$.
- **Stump trekant:** $v_2 \approx 128,8^\circ$ gir $c \approx \sqrt{170 - 154 \cos 128,8^\circ} \approx 16,3 \text{ cm}$.

$$\boxed{v \approx 51,2^\circ (c \approx 8,6 \text{ cm}) \quad \text{eller} \quad v \approx 128,8^\circ (c \approx 16,3 \text{ cm})}$$

Trekanten kan altså se ut på to måter: enten en relativt “flat”, spiss trekant, eller en stump trekant der den tredje siden er lengre.

Oppgave 5 (4 poeng)

Sylinder med $d + h = 6$, og radius x (så $d = 2x$ og $h = 6 - 2x$).

a) **Vis at** $V(x) = 6\pi x^2 - 2\pi x^3$ **for** $x \in \langle 0, 3 \rangle$

Løsning. Volumet av en sylinder er $V = \pi r^2 h$. Med $r = x$ og $h = 6 - 2x$:

$$V(x) = \pi x^2(6 - 2x) = 6\pi x^2 - 2\pi x^3.$$

Definisjonsmengden: radius må være positiv ($x > 0$), og høyden $h = 6 - 2x$ må være positiv ($x < 3$).
Altså $x \in \langle 0, 3 \rangle$, som skulle vises.

b) **Vis at det største volumet er nøyaktig** 8π

Løsning. Deriver:

$$V'(x) = 12\pi x - 6\pi x^2 = 6\pi x(2 - x).$$

$V'(x) = 0$ for $x = 0$ eller $x = 2$. Bare $x = 2$ ligger i $\langle 0, 3 \rangle$. Fortegnet til V' : positivt for $0 < x < 2$ og negativt for $2 < x < 3$, så $x = 2$ gir et **maksimum**.

$$V(2) = 6\pi \cdot 2^2 - 2\pi \cdot 2^3 = 24\pi - 16\pi = \boxed{8\pi}.$$

Det største volumet er altså nøyaktig 8π (cm^3), som skulle vises.

Oppgave 6 (8 poeng)

Oljemengden er $F(x) = 6000 \cdot 0,864^x$ liter, $x \in [0, 24]$ (timer).

a) **Startmengde og prosentvis lekkasje per time**

Løsning. Før lekkasjen, $x = 0$:

$$F(0) = 6000 \cdot 0,864^0 = \boxed{6000 \text{ liter}}.$$

Vekstfaktoren per time er $0,864 = 1 - 0,136$, altså en nedgang på

$$1 - 0,864 = 0,136 = \boxed{13,6 \% \text{ per time}}.$$

b) **Tegn grafen til** F

Løsning. Grafen er en avtagende eksponentialkurve. Noen punkter:

x (timer)	0	5	10	24
$F(x)$ (liter)	6000	≈ 2889	≈ 1391	≈ 180

Kurven starter i $(0, 6000)$, faller bratt i begynnelsen og flater ut mot null mot slutten av intervallet (men når aldri null).

c) Når er halvparten lekket ut?

Løsning. Halvparten av 6000 er 3000 liter igjen:

$$6000 \cdot 0,864^x = 3000 \implies 0,864^x = 0,5.$$

Ta logaritmen på begge sider:

$$x = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,864} \approx \boxed{4,7 \text{ timer}}.$$

d) Momentan vekstfart etter to timer

Løsning. Vi tilnærmer den momentane vekstfarten $F'(2)$ med et lite intervall rundt $x = 2$ (sentral differanse, $h = 0,001$):

$$F'(2) \approx \frac{F(2,001) - F(1,999)}{0,002} \approx -654,7 \text{ liter/time.}$$

$$\boxed{F'(2) \approx -655 \text{ liter/time}}$$

Tolkning. To timer etter at lekkasjen startet, minker oljemengden med ca. 655 liter per time akkurat på det tidspunktet. Det negative fortegnet viser at det lekker *ut* olje (mengden avtar).

Oppgave 7 (6 poeng)

Svingetiden er $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ med $g \approx 9,81$.

a) Løs formelen med hensyn på L

Løsning. Del på 2π og kvadrer:

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}} \implies \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{L}{g} \implies \boxed{L = \frac{gT^2}{4\pi^2}}.$$

b) Bestem snorlengden når $T = 1,0$ s

Løsning. Sett inn $T = 1$ og $g = 9,81$:

$$L = \frac{9,81 \cdot 1^2}{4\pi^2} \approx \boxed{0,25 \text{ m}}.$$

c) Bestem g på forsøksstedet

Løsning. Snorlengden var $L = 10,00$ m, og pendelen svingte 1000 ganger på 6345 s. Da er svingetiden

$$T = \frac{6345}{1000} = 6,345 \text{ s.}$$

Løs formelen for g : fra $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ får vi $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 10}{6,345^2} \approx \boxed{9,806}.$$

Oppgave 8 (6 poeng)

Norge: ca. 5 000 000 innbyggere, hvorav ca. 300 000 i Sør-Trøndelag.

a) Sannsynlighet for at en tilfeldig person bor i Sør-Trøndelag

Løsning.

$$p = \frac{300\,000}{5\,000\,000} = \frac{3}{50} = \boxed{0,06}.$$

b) Forklar at dette er et binomisk forsøk

Løsning. Vi gjør $n = 10$ uavhengige trekkninger. For hver person er det to utfall — “bor i Sør-Trøndelag” (suksess) eller ikke — og sannsynligheten for suksess er den samme, $p = 0,06$, ved hver trekning (folketallet er så stort at trekning uten tilbakelegging praktisk talt ikke endrer p). Antall suksesser X blant 10 er da binomisk fordelt: $X \sim B(10, 0,06)$.

c) Sannsynlighet for at ingen av de 10 bor i Sør-Trøndelag

Løsning.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,06^0 \cdot 0,94^{10} = 0,94^{10} \approx \boxed{0,539}.$$

d) Sannsynlighet for at minst 3 av de 10 bor i Sør-Trøndelag

Løsning. Bruk komplementet $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$:

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0,06 \cdot 0,94^9 \approx 0,344,$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,06^2 \cdot 0,94^8 \approx 0,099.$$

Dermed

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,539 - 0,344 - 0,099 \approx \boxed{0,019}.$$

Det er altså bare ca. 1,9% sannsynlig at minst 3 av 10 tilfeldige bor i Sør-Trøndelag.

(Merk: matematikk.net-fasiten oppgir her « $\approx 0,19$ », men dette er en åpenbar trykkfeil — summen $P(3) + P(4) + \dots + P(10) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 0,0188 \approx 0,019$, ikke 0,19.)

Oppgave 9 (4 poeng)

Andregradsfunksjonen er $f(x) = a(x - b)^2 + c$, der toppunktet/bunnpunktet er (b, c) .

a) Bestem c slik at grafen har nøyaktig ett nullpunkt for alle a og b

Løsning. Grafen er en parabel med ekstremalpunkt i (b, c) . Et nøyaktig ett nullpunkt betyr at parabellen akkurat tangerer x -aksen, altså at ekstremalpunktet ligger på x -aksen. Det krever at y -verdien i ekstremalpunktet er null:

$$c = 0.$$

Da er $f(x) = a(x - b)^2 = 0$ bare for $x = b$ — ett nullpunkt — uansett $a \neq 0$ og b .

$$\boxed{c = 0}$$

b) Bestem b slik at grafen har ekstremalpunkt i $x = 3$ for alle a og c

Løsning. Ekstremalpunktet til $f(x) = a(x - b)^2 + c$ ligger alltid i $x = b$ (toppunktsformen). For at ekstremalpunktet skal være i $x = 3$, må

$$b = 3.$$

Dette gjelder uavhengig av a og c , siden de bare påvirker hvor bratt parabellen er og hvor høyt den ligger, ikke plasseringen av symmetrilinjen.

$$\boxed{b = 3}$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.