

# Matematikk 1T — Høst 2012

## Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

**Om dette løsningsforslaget.** Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

### DEL 1 — Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1 (1 poeng)

**Oppgave.** En rett linje har stigningstall  $-2$  og skjærer  $x$ -aksen i punktet  $(3, 0)$ . Bestem likningen for linjen.

**Løsning.** En rett linje med stigningstall  $a = -2$  har formen  $y = -2x + b$ . Punktet  $(3, 0)$  ligger på linjen, så

$$0 = -2 \cdot 3 + b \implies b = 6.$$

$$\boxed{y = -2x + 6}$$

#### Oppgave 2 (1 poeng)

**Oppgave.** Løs likningen  $\lg(2x + 3) = 1$ .

**Løsning.**  $\lg$  er logaritmen med grunntall 10, så  $\lg(2x + 3) = 1$  betyr at  $2x + 3 = 10^1 = 10$ :

$$2x + 3 = 10 \implies 2x = 7 \implies x = \frac{7}{2}.$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2} = 3,5}$$

#### Oppgave 3 (1 poeng)

**Oppgave.** Skriv så enkelt som mulig:  $\frac{(2x)^3 \cdot x^2}{2^5 \cdot x^{-1}}$ .

**Løsning.** Vi bruker potensreglene. Teller:  $(2x)^3 \cdot x^2 = 2^3 x^3 \cdot x^2 = 8x^5$ .

$$\frac{(2x)^3 \cdot x^2}{2^5 \cdot x^{-1}} = \frac{2^3 \cdot x^5}{2^5 \cdot x^{-1}} = 2^{3-5} \cdot x^{5-(-1)} = 2^{-2} \cdot x^6 = \frac{x^6}{4}.$$

$$\boxed{\frac{x^6}{4}}$$

#### Oppgave 4 (2 poeng)

**Oppgave.** Skriv så enkelt som mulig:  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ .

**Løsning.** Vi faktorerer teller og nevner. Telleren er et fullstendig kvadrat, og nevneren er en konjugatsetning:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2, \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Da kan vi forkorte med felles faktor  $(x + 3)$ :

$$\frac{(x + 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}, \quad x \neq -3.$$

$$\boxed{\frac{x + 3}{x - 3}}$$

#### Oppgave 5 (1 poeng)

**Oppgave.** Skriv så enkelt som mulig:  $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ .

**Løsning.** Vi forenkler  $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ , slik at  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ . Da blir

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18.$$

$$\boxed{18}$$

#### Oppgave 6 (5 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . a) Finn nullpunktene ved regning. b) Begrunn at  $f$  har et bunnpunkt, og finn koordinatene. c) Skisser grafen.

a) Nullpunktene løses med abc-formelen ( $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -3$ ):

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Dette gir  $x = 1$  eller  $x = -3$ .

$$x = -3 \quad \text{og} \quad x = 1$$

**b)** Siden koeffisienten foran  $x^2$  er positiv ( $a = 1 > 0$ ), vender parabelen den hule siden opp, og funksjonen har derfor et **bunnpunkt** (laveste verdi).  $x$ -koordinaten til bunnpunktet ligger midt mellom nullpunktene:

$$x = \frac{-3 + 1}{2} = -1.$$

$y$ -verdien er  $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ .

$$\text{Bunnpunkt } (-1, -4)$$

**c)** Skisse: tegn en parabel som åpner oppover, med nullpunkter i  $(-3, 0)$  og  $(1, 0)$ , bunnpunkt i  $(-1, -4)$  og skjæring med  $y$ -aksen i  $(0, -3)$ .

### Oppgave 7 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs likningen  $(x + 5)(x + 3) - (x + 5)(2x + 7) = 0$ .

**Løsning.** Begge ledd har felles faktor  $(x + 5)$ . Vi setter den utenfor:

$$(x + 5)[(x + 3) - (2x + 7)] = 0.$$

Forenkler hakeparentesen:  $(x + 3) - (2x + 7) = x + 3 - 2x - 7 = -x - 4$ . Likningen blir

$$(x + 5)(-x - 4) = 0.$$

Et produkt er null når en av faktorene er null:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5, \quad -x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4.$$

$$x = -5 \quad \text{eller} \quad x = -4$$

### Oppgave 8 (4 poeng)

**Oppgave.** I klasse 1A er det 25 elever: 12 har valgt fysikk, 14 har valgt biologi, 4 har verken fysikk eller biologi. a) Systematiser i krysstabell/venndiagram. b) Sannsynlighet for at en tilfeldig elev har valgt **både** fysikk og biologi. c) Blant dem som har valgt biologi, sannsynligheten for at eleven også har fysikk.

**a)** Av 25 elever har 4 valgt ingen av fagene, så  $25 - 4 = 21$  har valgt minst ett fag. Antall som har valgt begge fag finnes med tellereglene:

$$|F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B| \Rightarrow 21 = 12 + 14 - |F \cap B| \Rightarrow |F \cap B| = 5.$$

Krysstabell (antall elever):

	Biologi	Ikke biologi	Sum
Fysikk	5	7	12
Ikke fysikk	9	4	13
Sum	14	11	25

b) 5 av 25 elever har valgt begge fag:

$$P(\text{fysikk og biologi}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \boxed{0,20}.$$

c) Vi vet at eleven har biologi (14 elever). Av disse har 5 også fysikk. Betinget sannsynlighet:

$$P(\text{fysikk} \mid \text{biologi}) = \frac{5}{14} \approx \boxed{0,36}.$$

### Oppgave 9 (4 poeng)

**Oppgave.** I rettvinklet trekant  $ABC$  (rett vinkel i  $B$ ) er sidene  $a = 12$ ,  $b = 13$ ,  $c = 5$ . a) Finn  $\sin A$  og  $\cos A$ . b) Vis at  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$  for disse tallene. c) Vis at  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$  for alle trekanter med  $\angle B = 90^\circ$ .

**Oppsett.** Med rett vinkel i  $B$  er  $b$  (siden mot  $B$ ) hypotenusen. Sett fra vinkel  $A$  er  $a$  den motstående kateten og  $c$  den hosliggende kateten.

a)

$$\sin A = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{a}{b} = \frac{12}{13}, \quad \cos A = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{c}{b} = \frac{5}{13}.$$

$$\boxed{\sin A = \frac{12}{13}, \quad \cos A = \frac{5}{13}}$$

b)

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1. \quad \blacksquare$$

c) For en vilkårlig trekant med  $\angle B = 90^\circ$  er  $b$  hypotenusen, mens  $a$  og  $c$  er katetene. Da er

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{b^2}.$$

Etter **Pytagoras** er  $a^2 + c^2 = b^2$  (summen av kvadratene på katetene er lik kvadratet på hypotenusen). Dermed

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{b^2}{b^2} = 1. \quad \blacksquare$$

### Oppgave 10 (3 poeng)

**Oppgave.** En sirkel er innskrevet i et kvadrat  $ABCD$  der diagonalen  $AC = 4$ . Vis at arealet av det blå området (kvadratet minus sirkelen) er  $8 - 2\pi$ .

**Løsning.** La kvadratet ha sidelengde  $s$ . Diagonalen i et kvadrat er  $s\sqrt{2}$ , så

$$s\sqrt{2} = 4 \implies s = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

**Kvadratets areal:**

$$A_{\text{kvadrat}} = s^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

Sirkelen er innskrevet, så diameteren er lik sidelengden:  $d = s = 2\sqrt{2}$ , altså radius  $r = \sqrt{2}$ .

**Sirkelens areal:**

$$A_{\text{sirkel}} = \pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi.$$

Det blå området er kvadratet minus sirkelen:

$$A_{\text{blå}} = A_{\text{kvadrat}} - A_{\text{sirkel}} = 8 - 2\pi. \quad \blacksquare$$

$$\boxed{A_{\text{blå}} = 8 - 2\pi}$$

## DEL 2 — Med hjelpemidler

### Oppgave 1 (3 poeng)

**Oppgave.** Total motstand  $R$  i en parallellkobling:  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ . a) Finn  $R$  når  $R_1 = 5$  og  $R_2 = 7$ .

b) Vis at hvis  $R_2 = 2R_1$ , så er  $R = \frac{2}{3}R_1$ .

a) Sett inn verdiene:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{7}{35} + \frac{5}{35} = \frac{12}{35}.$$

Da er  $R$  den omvendte brøken:

$$R = \frac{35}{12} \approx \boxed{2,9}.$$

b) Med  $R_2 = 2R_1$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} = \frac{2}{2R_1} + \frac{1}{2R_1} = \frac{3}{2R_1}.$$

Snur vi brøken, får vi

$$R = \frac{2R_1}{3} = \frac{2}{3}R_1. \quad \blacksquare$$

## Oppgave 2 (7 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ . a) Tegn grafen. b) Bestem tangenten i punktet  $(1, f(1))$  ved regning og tegn den. c) Grafen har to tangenter med stigningstall 2. Bestem likningene for disse.

a) Grafen er en tredjegradskurve. Nyttige holdepunkter (med digitalt verktøy/GeoGebra): nullpunkter i  $x = -2$ ,  $x = 1$  og  $x = 3$  (siden  $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ ), toppunkt nær  $x \approx -0,79$  og bunnpunkt nær  $x \approx 2,12$ . Skjæring med  $y$ -aksen i  $(0, 6)$ .

b) Vi deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5.$$

Funksjonsverdien og stigningstallet i  $x = 1$ :

$$f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0, \quad f'(1) = 3 - 4 - 5 = -6.$$

Tangenten gjennom  $(1, 0)$  med stigningstall  $-6$ :

$$y - 0 = -6(x - 1) \implies y = -6x + 6.$$

$$\boxed{y = -6x + 6}$$

c) Tangentens stigningstall er  $f'(x)$ . Vi løser  $f'(x) = 2$ :

$$3x^2 - 4x - 5 = 2 \implies 3x^2 - 4x - 7 = 0.$$

abc-formelen gir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6} = \frac{4 \pm 10}{6} \implies x = \frac{7}{3} \text{ eller } x = -1.$$

**Tangent 1** ( $x = -1$ ):  $f(-1) = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$ . Punktet er  $(-1, 8)$ :

$$y - 8 = 2(x + 1) \implies y = 2x + 10.$$

**Tangent 2** ( $x = \frac{7}{3}$ ):  $f(\frac{7}{3}) = -\frac{104}{27} \approx -3,85$ . Punktet er  $(\frac{7}{3}, -\frac{104}{27})$ :

$$y + \frac{104}{27} = 2\left(x - \frac{7}{3}\right) \implies y = 2x - \frac{230}{27} \approx 2x - 8,52.$$

$$y = 2x + 10 \quad \text{og} \quad y = 2x - \frac{230}{27} \approx 2x - 8,52$$

### Oppgave 3 (4 poeng)

**Oppgave.** Likebeint trekant  $ABC$  med  $AC = BC = 11$  og grunnlinje  $AB = 8$ . Høyden  $h$  fra  $C$  deler grunnlinjen i to. a) Bestem vinkelen  $\alpha = \angle A$  ved regning. b) Bestem høyden  $h$  ved regning.

a) Høyden fra  $C$  treffer  $AB$  vinkelrett og deler den i to like deler à 4. I den rettvinklede halvtrekanten er hypotenusen  $AC = 11$  og den hosliggende kateten til  $\alpha$  er 4:

$$\cos \alpha = \frac{4}{11} \implies \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{11}\right) \approx 68,7^\circ.$$

$$\alpha \approx 68,7^\circ$$

b) Høyden  $h$  er den motstående kateten. Vi bruker Pytagoras i halvtrekanten:

$$h = \sqrt{11^2 - 4^2} = \sqrt{121 - 16} = \sqrt{105} \approx 10,2.$$

$$h = \sqrt{105} \approx 10,2$$

### Oppgave 4 (6 poeng)

**Oppgave.** 60% av bilistene betaler med kort (resten med kontanter). a) Sannsynlighet for at de 10 første bilistene alle betaler med kort. b) Sannsynlighet for at nøyaktig 10 av de 20 første betaler med kort. c) Sannsynlighet for at mer enn halvparten av de 50 første betaler med kort.

La  $X$  være antall som betaler med kort. Vi har binomisk fordeling med  $p = 0,60$ .

a) Alle 10 av 10 betaler med kort:

$$P = 0,60^{10} \approx 0,0060.$$

$$P \approx 0,0060 \text{ (0,60\%)}$$

b) Nøyaktig 10 av  $n = 20$  ( $X \sim \text{bin}(20, 0,60)$ ):

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} 0,60^{10} 0,40^{10} \approx 0,117.$$

$$P(X = 10) \approx 0,117 \text{ (11,7\%)}$$

c) «Mer enn halvparten» av 50 betyr flere enn 25, altså  $X \geq 26$  (med  $n = 50$ ,  $p = 0,60$ ):

$$P(X \geq 26) = \sum_{k=26}^{50} \binom{50}{k} 0,60^k 0,40^{50-k} \approx 0,902.$$

$$P(X \geq 26) \approx 0,90 \text{ (90\%)}$$

Disse regnes enklest med digitalt verktøy. I GeoGebra gir `Binomialfordeling(20, 0.6, 10, false)` punktsannsynligheten i b), og `1-Binomialfordeling(50, 0.6, 25, true)` gir  $P(X \geq 26)$  i c).

### Oppgave 5 (4 poeng)

**Oppgave.** Petter ser på tabellen med  $n$  og  $n^2$ . Han tror at *summen av to etterfølgende hele tall pluss kvadratet av det minste er lik kvadratet av det største*. a) Vis med et eksempel at det stemmer. b) Formuler påstanden for  $n$  og  $n + 1$  og vis at den er riktig.

a) Vi velger tallene 3 og 4. Det minste er 3, det største er 4:

$$\underbrace{3+4}_{\text{summen}} + \underbrace{3^2}_{\text{kvadr. av minste}} = 7 + 9 = 16 = 4^2.$$

Påstanden stemmer for 3 og 4. (Et annet eksempel:  $5 + 6 + 5^2 = 11 + 25 = 36 = 6^2$ .)

b) For to etterfølgende hele tall  $n$  og  $n + 1$  (det minste er  $n$ , det største er  $n + 1$ ) blir påstanden

$$n + (n + 1) + n^2 = (n + 1)^2.$$

Vi regner ut venstresiden:

$$n + (n + 1) + n^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Høyresiden er  $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ . Venstre og høyre side er identiske, så påstanden er riktig for alle hele tall  $n$ . ■

### Oppgave 6 (6 poeng)

**Oppgave.** I trekant  $ABC$  er  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = 5,0$  og  $AC + BC = 8,0$  (med  $BC = x$ ,  $AC = 8,0 - x$ ).

a) Bestem  $BC$  ved regning. I trekant  $DEF$  er  $\angle D = 30^\circ$ ,  $DE = 5,0$  og  $DF + EF = 8,0$ . b) Bestem  $EF$  ved regning. c) Bestem  $\angle E$  ved regning.

a) Trekant  $ABC$  er rettvinklet i  $B$ , så Pytagoras gir  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Med  $BC = x$  og  $AC = 8 - x$ :

$$(8 - x)^2 = 5^2 + x^2.$$

Vi løser:

$$64 - 16x + x^2 = 25 + x^2 \implies 64 - 16x = 25 \implies 16x = 39 \implies x = \frac{39}{16} = 2,4375.$$

$$BC = \frac{39}{16} \approx 2,4$$

b) Her er vinkelen i  $D$  ikke  $90^\circ$ , så vi bruker **cosinussetningen**. Siden  $EF$  ligger mot vinkel  $D$ , og de to sidene som danner  $\angle D$  er  $DE = 5$  og  $DF = 8 - EF$ :

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos D.$$

Sett  $EF = u$ , så er  $DF = 8 - u$ :

$$u^2 = 5^2 + (8 - u)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (8 - u) \cdot \cos 30^\circ.$$

Med  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  løser vi likningen (CAS/GeoGebra):

$$u = \frac{824 - 195\sqrt{3}}{181} \approx 2,69.$$

$$EF \approx 2,7$$

Da blir  $DF = 8 - 2,69 \approx 5,31$ .

c) Vi finner  $\angle E$  med **sinussetningen**.  $\angle E$  ligger mot siden  $DF \approx 5,31$ , og  $\angle D = 30^\circ$  ligger mot  $EF \approx 2,69$ :

$$\frac{\sin E}{DF} = \frac{\sin D}{EF} \implies \sin E = \frac{DF \cdot \sin 30^\circ}{EF} = \frac{5,31 \cdot 0,5}{2,69} \approx 0,989.$$

$$E = \sin^{-1}(0,989) \approx 81,5^\circ.$$

(Kontroll med cosinussetningen gir samme svar, og siden  $EF$  er den korteste siden, er  $\angle D = 30^\circ$  minst, så  $\angle E$  er spiss — løsningen  $\approx 81,5^\circ$  er den riktige.)

$$\angle E \approx 81,5^\circ$$

### Oppgave 7 (6 poeng)

**Oppgave.** En kasse uten lokk har kvadratisk grunnflate med side  $x$  dm og høyde  $h$  dm. Høyden pluss omkretsen av grunnflaten er til sammen 30 dm. a) Forklar at  $0 < x < 7,5$ . b) Vis at overflaten er  $O(x) = -15x^2 + 120x$ . c) Bestem  $x$  som gir størst overflate, og finn overflaten.

a) Omkretsen av den kvadratiske grunnflaten er  $4x$ , og betingelsen er  $h + 4x = 30$ , altså

$$h = 30 - 4x.$$

Både  $x$  og  $h$  må være positive lengder.  $x > 0$  er åpenbart. For at  $h > 0$  må

$$30 - 4x > 0 \implies x < \frac{30}{4} = 7,5.$$

Derfor er  $0 < x < 7,5$ . ■

b) Kassen har ikke lokk, så overflaten består av **bunnen** ( $x^2$ ) og **fire sideflater** ( $4 \cdot x \cdot h$ ):

$$O = x^2 + 4xh.$$

Sett inn  $h = 30 - 4x$ :

$$O(x) = x^2 + 4x(30 - 4x) = x^2 + 120x - 16x^2 = -15x^2 + 120x. \quad \blacksquare$$

c)  $O(x) = -15x^2 + 120x$  er en parabel som vender ned ( $-15 < 0$ ), så den har et toppunkt. Vi deriverer og setter lik null:

$$O'(x) = -30x + 120 = 0 \implies x = \frac{120}{30} = 4.$$

$x = 4$  ligger i  $(0, 7,5)$ , og gir maksimal overflate:

$$O(4) = -15 \cdot 4^2 + 120 \cdot 4 = -240 + 480 = 240.$$

$x = 4 \text{ dm gir størst overflate } O = 240 \text{ dm}^2$

**Kontrollprogram.** Vi sjekker maksimum numerisk ved å gå gjennom mange  $x$ -verdier i intervallet.

```
def O(x):
    return -15*x**2 + 120*x

beste_x, beste_0 = 0, 0
x = 0.0
while x < 7.5:
    if O(x) > beste_0:
        beste_0, beste_x = O(x), x
    x += 0.0001
print(round(beste_x, 2), round(beste_0, 2))    # 4.0 240.0

#include <iostream>
#include <iomanip>
double O(double x) { return -15*x*x + 120*x; }
int main() {
    double beste_x = 0, beste_0 = 0;
    for (double x = 0.0; x < 7.5; x += 0.0001) {
        if (O(x) > beste_0) { beste_0 = O(x); beste_x = x; }
    }
    std::cout << std::fixed << std::setprecision(2)
```

```
        << beste_x << " " << beste_0 << "\n"; // 4.00 240.00
return 0;
}
```

---

*Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: [matematikk.net](http://matematikk.net). Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.*