Matematikk 1T — Høst 2013

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $7{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi multipliserer tallene og legger sammen eksponentene:

$$7{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-4} = (7{,}5 \cdot 4{,}0) \cdot 10^{12-4} = 30 \cdot 10^{8}.$$

På standardform skal det stå nøyaktig ett siffer ulik null foran komma, så $30 = 3{,}0 \cdot 10^{1}$:

$$\boxed{3{,}0 \cdot 10^{9}}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. Siv har 4 blå og 6 svarte bukser. 1 blå og 3 svarte passer ikke lenger. a) Fyll ut en tabell (passer / passer ikke, fordelt på farge). b) Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt bukse passer. c) Gitt at den passer, sannsynligheten for at den er blå.

a) Av de 4 blå passer $4 - 1 = 3$, av de 6 svarte passer $6 - 3 = 3$. Tabellen blir:

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer	3	3	6
Bukser som ikke passer	1	3	4
Sum	4	6	10

b) Det er 6 bukser som passer av totalt 10:

$$P(\text{passer}) = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

c) Av de 6 buksene som passer, er 3 blå. Den betingede sannsynligheten er

$$P(\text{blå} \mid \text{passer}) = \frac{P(\text{blå og passer})}{P(\text{passer})} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Skriv $\dfrac{2x^2-18}{x^2+6x+9}$ så enkelt som mulig.

Løsning. Faktoriser teller og nevner hver for seg. Telleren har en felles faktor 2, og x^2-9 er en konjugatsetning:

$$2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x-3)(x+3).$$

Nevneren er et fullstendig kvadrat:

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2.$$

Vi forkorter med felles faktor $(x+3)$ (gyldig for $x \neq -3$):

$$\frac{2(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \boxed{\frac{2(x-3)}{x+3}}, \qquad x \neq -3.$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og forenkle $\dfrac{\sqrt{2}\cdot 2^0 \cdot 2^{-1}}{8^{1/2}\cdot 2^{-2}}$.

Løsning. Vi skriver alt som potenser av 2. Husk $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, $2^0 = 1$ og $8^{1/2} = (2^3)^{1/2} = 2^{3/2}$.

Teller:

$$2^{1/2}\cdot 2^0 \cdot 2^{-1} = 2^{\frac{1}{2}+0-1} = 2^{-1/2}.$$

Nevner:

$$2^{3/2}\cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{2}-2} = 2^{-1/2}.$$

Dermed blir brøken

$$\frac{2^{-1/2}}{2^{-1/2}} = 2^{-1/2-(-1/2)} = 2^0 = \boxed{1}.$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $2\lg x - 8 = 5\lg x + 1$.

Løsning. Samle logaritmeleddene på én side:

$$2\lg x - 5\lg x = 1 + 8 \implies -3\lg x = 9 \implies \lg x = -3.$$

At $\lg x = -3$ betyr $x = 10^{-3}$:

$$\boxed{x = 10^{-3} = 0{,}001}.$$

(Sjekk: $x > 0$, så $\lg x$ er definert.)

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. En rett linje går gjennom punktene $(1, 2)$ og $(3, 5)$. Bestem likningen for linjen.

Løsning. Stigningstallet er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

Linjen har formen $y = \frac{3}{2}x + b$. Vi setter inn punktet $(1, 2)$ for å finne b:

$$2 = \tfrac{3}{2}\cdot 1 + b \implies b = 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $-x + y = 2$ og $-2x^2 + y^2 = 4$.

Løsning. Fra den første likningen er $y = x + 2$. Sett inn i den andre:

$$-2x^2 + (x+2)^2 = 4 \implies -2x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4.$$

Dette forenkles til

$$-x^2 + 4x = 0 \implies -x(x-4) = 0,$$

så $x = 0$ eller $x = 4$. Tilhørende y-verdier fra $y = x + 2$:

- $x = 0 \Rightarrow y = 2$
- $x = 4 \Rightarrow y = 6$

$$\boxed{(0,\,2) \quad \text{og} \quad (4,\,6)}$$

Oppgave 8 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 - 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$. a) Bestem ekstremalpunktene ved regning. b) Forklar at $f(x) = x^2(x-3)$, og bruk det til å finne nullpunktene. c) Lag en skisse av grafen.

a) Vi deriverer og setter den deriverte lik null:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

Fortegnsskjema for $f'(x) = 3x(x-2)$: $f' > 0$ for $x < 0$, $f' < 0$ for $0 < x < 2$ og $f' > 0$ for $x > 2$. Altså

- $x = 0$: topppunkt, $f(0) = 0$,
- $x = 2$: bunnpunkt, $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.

$$\boxed{\text{Topppunkt } (0,\,0), \quad \text{bunnpunkt } (2,\,-4)}$$

b) Vi setter x^2 utenfor parentes:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3).$$

Nullpunktene er der $f(x) = 0$, altså $x^2 = 0$ eller $x - 3 = 0$:

$$\boxed{x = 0 \text{ (dobbelt)} \quad \text{og} \quad x = 3}.$$

c) Skisse: Grafen er en tredjegradskurve som stiger fra venstre, har **topppunkt i** $(0,0)$, synker ned til **bunnpunkt i** $(2,-4)$ og stiger igjen og krysser x-aksen i $x = 3$. Den berører x-aksen i $x = 0$ (dobbelt nullpunkt) og skjærer i $x = 3$. For store x går $f \to \infty$, for små (negative) x går $f \to -\infty$.

Oppgave 9 (1 poeng)

Oppgave. I $\triangle ABC$ er $\angle B = 90^\circ$ og $\sin A = \frac{3}{7}$. Bestem $\cos C$.

Løsning. Vinkelsummen i trekanten er 180°, og $\angle B = 90^\circ$, så $\angle A + \angle C = 90^\circ$. Da er A og C komplementvinkler, og

$$\cos C = \cos(90^\circ - A) = \sin A.$$

Dermed

$$\boxed{\cos C = \frac{3}{7}}.$$

Oppgave 10 (2 poeng)

Oppgave. En firkant (trapes) har parallelle sider 6 (topp) og 10 (bunn), høyde 4 og høyre skråside 5. Vis at omkretsen er $21 + \sqrt{17}$.

Løsning. Vi feller normaler fra de to toppunktene ned på den lange siden. Da deles den lange siden (10) i tre deler: et midtstykke under toppsiden (6) og to vannrette «overheng» på sidene.

Høyre side (5): den danner en rettvinklet trekant med høyden 4 som katet. Det vannrette overhenget på høyre side er

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Venstre side: Til sammen er overhengene $10 - 6 = 4$. Siden høyre overheng er 3, blir venstre overheng $4 - 3 = 1$. Venstre skråside har høyde 4 og vannrett overheng 1, så ved Pytagoras:

$$\text{venstre side} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

Omkretsen blir summen av alle fire sidene:

$$O = 6 + 10 + 5 + \sqrt{17} = \boxed{21 + \sqrt{17}}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Oppgave. $f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$ er antall tonn fisk x år etter 2000. a) Tegn grafen for $x \in [0, 10]$. b) Bestem grafisk når bestanden var minst, og hvor mye fisk det var da. c) Finn svaret i b) ved regning. d) Regn ut $f(5)$ og den momentane vekstfarten i $x = 5$, og tolk svarene.

a) Grafen tegnes i et digitalt verktøy (GeoGebra/CAS) for $x \in [0, 10]$. Holdepunkter for grafen:

- $f(0) = 300$ (start, år 2000),
- lokalt topppunkt ved $x \approx 2{,}10$ med $f \approx 456$,
- lokalt bunnpunkt ved $x \approx 8{,}57$ med $f \approx 51$,
- $f(10) = 3 \cdot 1000 - 48 \cdot 100 + 1620 + 300 = 120$.

b) Grafisk ser vi at den laveste verdien på intervallet $[0, 10]$ ligger i det lokale bunnpunktet. Bestanden var minst ca. 8,6 **år etter 2000 (i 2008/2009)**, og da var det ca. 51 **tonn fisk**.

c) Ved regning. Vi deriverer og finner kritiske punkter:

$$f'(x) = 9x^2 - 96x + 162 = 3(3x^2 - 32x + 54) = 0.$$

abc-formelen på $3x^2 - 32x + 54 = 0$:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 3 \cdot 54}}{2 \cdot 3} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 648}}{6} = \frac{32 \pm \sqrt{376}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{94}}{3}.$$

Dette gir $x \approx 2{,}10$ (topppunkt) og $x \approx 8{,}57$ (bunnpunkt). For å finne den **minste** verdien på det lukkede intervallet $[0, 10]$ sammenligner vi det lokale bunnpunktet med endepunktene:

$$f(0) = 300, \qquad f\left(\tfrac{16+\sqrt{94}}{3}\right) \approx 51{,}3, \qquad f(10) = 120.$$

Den minste verdien er altså i bunnpunktet. Bestanden var minst etter

$$\boxed{x = \frac{16+\sqrt{94}}{3} \approx 8{,}6 \text{ år (ca. 2008/2009)}, \quad f \approx 51 \text{ tonn}}.$$

d) Funksjonsverdien i $x = 5$:

$$f(5) = 3 \cdot 125 - 48 \cdot 25 + 162 \cdot 5 + 300 = 375 - 1200 + 810 + 300 = \boxed{285 \text{ tonn}}.$$

Momentan vekstfart er den deriverte:

$$f'(5) = 9 \cdot 25 - 96 \cdot 5 + 162 = 225 - 480 + 162 = \boxed{-93 \text{ tonn/år}}.$$

Tolkning: I år 2005 ($x = 5$) var det 285 tonn fisk i bestanden, og bestanden **avtok** (negativt fortegn) med en fart på ca. 93 tonn per år akkurat da.

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. En dam har 20 000 L vann; mengden minker 8 % hvert døgn. a) Vannmengde etter ett og etter ti døgn. b) Hvor mange døgn til det er 5000 L igjen.

Modellen er eksponentiell: $V(n) = 20000 \cdot 0{,}92^n$, der n er antall døgn (vekstfaktor $1 - 0{,}08 = 0{,}92$).

a) Etter ett døgn:

$$V(1) = 20000 \cdot 0{,}92 = \boxed{18\,400 \text{ L}}.$$

Etter ti døgn:

$$V(10) = 20000 \cdot 0{,}92^{10} \approx \boxed{8688 \text{ L}}.$$

b) Vi løser $20000 \cdot 0{,}92^n = 5000$:

$$0{,}92^n = \frac{5000}{20000} = 0{,}25 \implies n = \frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}92} \approx 16{,}6.$$

Etter 16 døgn er det fortsatt litt mer enn 5000 L, så det går 17 **døgn** før mengden har passert ned under 5000 L.

$$\boxed{n \approx 16{,}6 \;\Rightarrow\; \textit{det} \text{ går 17 døgn før det er under 5000 L}}$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Oppgave. 20 % av syklister sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig 10 syklister. a) P(minst én uten lys). b) P(bare nr. 1, 4 og 10 uten lys). c) P(nøyaktig 3 av 10 uten lys).

La $p = 0{,}2$ være sannsynligheten for at en syklist sykler uten lys, og $1-p = 0{,}8$ for med lys. Valgene er uavhengige.

a) «Minst én» er komplementet til «ingen»:

$$P(\text{minst én}) = 1 - P(\text{ingen uten lys}) = 1 - 0{,}8^{10} \approx 1 - 0{,}1074 = \boxed{0{,}893}.$$

b) En bestemt rekkefølge der nøyaktig nr. 1, 4 og 10 sykler uten lys (de andre 7 med lys):

$$P = 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}008 \cdot 0{,}2097 \approx \boxed{0{,}0017}.$$

c) «Nøyaktig 3 av 10» er en binomisk sannsynlighet. Det finnes $\binom{10}{3}$ måter å plassere de tre på:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 = 120 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}2097 \approx \boxed{0{,}201}.$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Per, Pål og Espen har til sammen 198 mynter. Per har 6 ganger så mange som Pål og 3 ganger så mange som Espen. Hvor mange har hver?

Løsning. La Per ha x mynter. Da har Pål $\frac{x}{6}$ (siden Per = 6·Pål) og Espen $\frac{x}{3}$ (siden Per = 3·Espen). Summen er 198:

$$x + \frac{x}{6} + \frac{x}{3} = 198.$$

Vi ganger med 6:

$$6x + x + 2x = 1188 \implies 9x = 1188 \implies x = 132.$$

Da blir Pål $\frac{132}{6} = 22$ og Espen $\frac{132}{3} = 44$.

$$\boxed{\text{Per } 132, \quad \text{Pål } 22, \quad \text{Espen } 44}$$

(Kontroll: $132 + 22 + 44 = 198$. ✓)

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Vis at det finnes to ulike trekanter med en side 5,0 cm, en side 8,0 cm og areal 17,5 cm^2.

Løsning. La de to oppgitte sidene være $a = 5{,}0$ og $b = 8{,}0$, og la v være vinkelen mellom dem. Arealformelen gir

$$A = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\sin v = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin v = 20\sin v.$$

Vi krever $A = 17{,}5$:

$$20\sin v = 17{,}5 \implies \sin v = \frac{17{,}5}{20} = 0{,}875.$$

Likningen $\sin v = 0{,}875$ har **to** løsninger mellom 0° og 180°:

$$v_1 = \sin^{-1}(0{,}875) \approx 61{,}0^\circ \qquad \text{og} \qquad v_2 = 180^\circ - 61{,}0^\circ \approx 119{,}0^\circ.$$

Begge vinklene er gyldige (mellom 0° og 180°) og gir hver sin trekant — én spissvinklet og én stumpvinklet mellom de to sidene. Begge har sidene 5,0 og 8,0 og areal 17,5 cm^2, men de er ulike. Dermed finnes det

$$\boxed{\text{to ulike trekanter, med mellomvinkel } \approx 61{,}0^\circ \text{ og } \approx 119{,}0^\circ}.$$

Oppgave 6 (6 poeng)

Oppgave. Et område $ABCDE$ (se figur). Gitt: $\angle DAB = 75{,}0^\circ$, $AE = 6{,}0$ m, $\angle ABE = 75{,}0^\circ$, $\angle EBC = 83{,}3^\circ$, $ED = 3{,}0$ m, $\angle EDC = 85{,}3^\circ$, $DC = 9{,}0$ m. a) Bestem arealet av $\triangle ABE$. b) Bestem CE. c) Bestem BC.

a) Areal av $\triangle ABE$. I trekanten kjenner vi $\angle A = 75{,}0^\circ$, $\angle ABE = 75{,}0^\circ$, så

$$\angle AEB = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ.$$

Trekanten er likebeint (to like vinkler ved A og B), så sidene som ligger motsatt disse er like: $BE = AE = 6{,}0$ m. Arealet med to sider og mellomliggende vinkel ($\angle AEB = 30^\circ$ mellom AE og EB):

$$A_{\triangle ABE} = \tfrac{1}{2}\cdot AE\cdot BE\cdot \sin(\angle AEB) = \tfrac{1}{2}\cdot 6{,}0\cdot 6{,}0\cdot \sin 30^\circ = 18\cdot \tfrac{1}{2} = \boxed{9{,}0 \text{ m}^2}.$$

b) Lengden CE. Se på trekant EDC, der vi kjenner $ED = 3{,}0$, $DC = 9{,}0$ og mellomvinkelen $\angle EDC = 85{,}3^\circ$. Cosinussetningen gir

$$CE^2 = ED^2 + DC^2 - 2\cdot ED\cdot DC\cdot \cos(\angle EDC) = 3^2 + 9^2 - 2\cdot 3\cdot 9\cdot \cos 85{,}3^\circ.$$

$$CE^2 = 9 + 81 - 54\cdot 0{,}0819 \approx 90 - 4{,}42 = 85{,}58,$$

$$CE \approx \boxed{9{,}3 \text{ m}}.$$

c) Lengden BC. Se på trekant BEC. Vi kjenner $BE = 6{,}0$, $CE \approx 9{,}25$ og vinkelen $\angle EBC = 83{,}3^\circ$. Den kjente vinkelen ligger **motsatt den lengste siden** CE, så sinussetningen gir kun én gyldig løsning (ingen tvetydighet). Vi finner først $\angle BCE$:

$$\frac{\sin(\angle BCE)}{BE} = \frac{\sin(\angle EBC)}{CE} \implies \sin(\angle BCE) = \frac{6{,}0 \cdot \sin 83{,}3^\circ}{9{,}25} \approx 0{,}644,$$

så $\angle BCE \approx 40{,}1^\circ$. Da er

$$\angle BEC = 180^\circ - 83{,}3^\circ - 40{,}1^\circ \approx 56{,}6^\circ.$$

Til slutt BC med sinussetningen:

$$\frac{BC}{\sin(\angle BEC)} = \frac{CE}{\sin(\angle EBC)} \implies BC = \frac{9{,}25 \cdot \sin 56{,}6^\circ}{\sin 83{,}3^\circ} \approx \boxed{7{,}8 \text{ m}}.$$

Oppgave 7 (8 poeng)

Oppgave. En kjegle er innskrevet i en kule med sentrum S og radius $R = 3$. Kjeglens grunnflate har radius r, og høyden er $h = 3 + y$, der y er avstanden fra S til grunnflaten. a) Sett $r = 2$; hvor høy er kjeglen? b) Bestem volumet ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$). c) Sett $r = x$ og vis at volumet er $f(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(3 + \sqrt{9 - x^2})$. d) Finn r og h som gir størst volum, og det største volumet.

Sammenheng. Grunnflaten er en sirkel med radius r i avstand y fra kulesenteret. Et punkt på grunnflatens rand ligger på kuleflaten, så ved Pytagoras i den rettvinklede trekanten (r, y, R):

$$r^2 + y^2 = R^2 = 9 \implies y = \sqrt{9 - r^2}.$$

a) Med $r = 2$:

$$y = \sqrt{9 - 2^2} = \sqrt{5}, \qquad h = 3 + y = \boxed{3 + \sqrt{5} \approx 5{,}24}.$$

b) Volumet med $r = 2$ og $h = 3 + \sqrt{5}$:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (3 + \sqrt{5}) = \frac{4\pi(3 + \sqrt{5})}{3} \approx \boxed{21{,}9}.$$

c) Med $r = x$ er $y = \sqrt{9 - x^2}$ og $h = 3 + \sqrt{9 - x^2}$. Settes dette inn i volumformelen:

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\pi x^2 h = \boxed{\tfrac{1}{3}\pi\, x^2\,(3 + \sqrt{9 - x^2})}.$$

d) Vi maksimerer f for $0 < x < 3$. Deriverer (med CAS/regning):

$$f'(x) = \frac{\pi}{3}\left(6x + \sqrt{9-x^2}\cdot 2x + x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right) = 0.$$

Løsning av $f'(x) = 0$ for $0 < x < 3$ gir $x = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Da er

$$y = \sqrt{9-(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-8} = 1, \qquad h = 3+1 = 4.$$

Det største volumet blir

$$f(2\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot 4 = \frac{32\pi}{3} \approx 33{,}5.$$

$$\boxed{r = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83, \quad h = 4, \quad V_{\text{max}} = \frac{32\pi}{3} \approx 33{,}5}$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.