Matematikk 1T — Høst 2014

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $25\,000\,000\,000 \cdot 0{,}0005$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Skriv begge faktorene på standardform og gang sammen:

$$25\,000\,000\,000 \cdot 0{,}0005 = 2{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 12{,}5 \cdot 10^{6} = 1{,}25 \cdot 10^{7}.$$

$$\boxed{1{,}25 \cdot 10^{7}}$$

Oppgave 2 (1 poeng)

Oppgave. Løs likningen $2^{\,2+\frac{x}{2}} = 16$.

Løsning. Vi skriver $16 = 2^4$. Når potensene har samme grunntall, må eksponentene være like:

$$2 + \frac{x}{2} = 4 \implies \frac{x}{2} = 2 \implies x = 4.$$

$$\boxed{x = 4}$$

Oppgave 3 (1 poeng)

Oppgave. Løs likningen $\lg(2x - 3) = 0$.

Løsning. Per definisjon er $\lg a = 0 \iff a = 10^0 = 1$. Altså:

$$2x - 3 = 1 \implies 2x = 4 \implies x = 2.$$

Kontroll av definisjonsmengden: $2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$, så uttrykket inni logaritmen er gyldig.

$$\boxed{x = 2}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 + x > 2$.

Løsning. Flytt alt over på én side:

$$x^2 + x - 2 > 0.$$

Nullpunktene faktoriseres: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, altså $x = -2$ og $x = 1$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er **positivt utenfor** nullpunktene:

$$\boxed{x < -2 \ \text{ eller } \ x > 1}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. I en klasse er det 6 gutter og 4 jenter. To elever trekkes tilfeldig. Tegn et valgtre og finn sannsynligheten for at det blir én jente og én gutt.

Løsning. Vi trekker uten tilbakelegging. Valgtreet har to nivåer (1. og 2. trekning):

```
6/10 Gutt    5/9 Gutt
             4/9 Jente
4/10 Jente    6/9 Gutt
             3/9 Jente
```

«Én jente og én gutt» skjer på to måter — gutt så jente, eller jente så gutt:

$$P = \underbrace{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}_{\text{G, så J}} + \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{\text{J, så G}} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

$$\boxed{P(\text{én jente og én gutt}) = \frac{8}{15} \approx 0{,}53}$$

Oppgave 6 (3 poeng)

Oppgave. Grafen til en tredjegradsfunksjon f er gitt, sammen med en verditabell ($x = -1, 0, 1, 2, 3$ gir $f(x) = -8, 0, -4, -8, 0$). a) For hvilke x er $f(x) \geq 0$, og for hvilke er $f'(x) < 0$? b) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = 0$ til $x = 2$.

Bakgrunn. Av grafen og tabellen ser vi at f har nullpunkt i $x = 0$ (der grafen tangerer x-aksen) og i $x = 3$ (der grafen krysser). Et passende uttrykk er $f(x) = 2x^2(x-3) = 2x^3 - 6x^2$, som stemmer med hele tabellen (f.eks. $f(1) = 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4$ og $f(2) = 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -8$).

a) *Hvor er $f(x) \geq 0$?* Grafen ligger på eller over x-aksen i det isolerte punktet $x = 0$ og fra $x = 3$ og oppover:

$$\boxed{f(x) \geq 0 \text{ for } x = 0 \text{ eller } x \geq 3.}$$

Hvor er $f'(x) < 0$? $f'(x) < 0$ der grafen synker. Grafen synker mellom det lokale toppunktet (i $x = 0$) og bunnpunktet (i $x = 2$):

$$\boxed{f'(x) < 0 \text{ for } 0 < x < 2.}$$

b) Gjennomsnittlig vekstfart fra $x = 0$ til $x = 2$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-8 - 0}{2} = \boxed{-4}.$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Trekk sammen og forenkle $\dfrac{3x}{x+3} - \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{x^2 - 12x + 9}{x^2 - 9}$.

Løsning. Fellesnevneren er $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Utvid de to første brøkene:

$$\frac{3x(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2 - 12x + 9}{(x+3)(x-3)}.$$

Samle tellerne:

$$\frac{3x(x-3) - 3(x+3) - (x^2 - 12x + 9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{(3x^2 - 9x) - (3x + 9) - x^2 + 12x - 9}{(x+3)(x-3)}.$$

Telleren forenkles:

$$3x^2 - 9x - 3x - 9 - x^2 + 12x - 9 = 2x^2 + 0 \cdot x - 18 = 2(x^2 - 9).$$

Dermed:

$$\frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \boxed{2} \qquad (x \neq \pm 3).$$

Oppgave 8 (3 poeng)

Oppgave. Forklar hvorfor hver påstand er riktig: a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} > 2$, b) $\tan 45^\circ = 1$, c) $\log 200 > 2$.

a) En negativ eksponent betyr den inverse:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2} = 2{,}5 > 2. \checkmark$$

b) I en rettvinklet, likebeint trekant er de to katetene like lange. Da er

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{k}{k} = 1. \checkmark$$

c) log er titallslogaritmen. Vi vet at $\log 100 = 2$. Siden $200 > 100$ og logaritmen er voksende:

$$\log 200 > \log 100 = 2. \checkmark$$

Oppgave 9 (4 poeng)

Oppgave. I $\triangle ABC$ er det rett vinkel i A. D ligger på AB og E på AC med $DE \parallel BC$. Gitt $AB = 8$, $AE = 3$ og arealet av $\triangle ABC$ er 16. a) Bestem AC og AD ved regning. b) Vis at $BC - DE = \sqrt{5}$.

a) Med rett vinkel i A er AB og AC de to katetene, så arealet er

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 16 \implies \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC = 16 \implies AC = 4.$$

Fordi $DE \parallel BC$, er $\triangle ADE$ formlik med $\triangle ABC$. Forholdet er $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{3}{4}$, og det samme forholdet gjelder for AD og AB:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \implies AD = AB \cdot \frac{3}{4} = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6.$$

$$\boxed{AC = 4, \qquad AD = 6}$$

b) BC er hypotenusen i den rettvinklede $\triangle ABC$:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

På grunn av formlikheten er $DE = \dfrac{3}{4} BC = \dfrac{3}{4} \cdot 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. Dermed:

$$BC - DE = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \boxed{\sqrt{5}}. \checkmark$$

Oppgave 10 (5 poeng)

Oppgave. Karin deriverer $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ved å bruke potensregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Hun skriver $f(x) = x^{-1/2}$ og $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1}$. a) Skriv om og vis at $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. b) Bestem $g'(x)$ og $h'(x)$ for $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ og $h(x) = \sqrt{x}$.

a) Forenkle eksponenten i $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1}$:

$$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}, \qquad \text{så} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

En negativ eksponent flyttes ned i nevneren, og $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}. \checkmark$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$$

b) *For* $g(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$*:*

$$g'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}.$$

For $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$*:*

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. En tabell viser en tilnærmet lineær sammenheng mellom x og y (verdiene x = 0,6; 2,5; 5,4; 7,8; 9,6 og y = 250; 480; 660; 920; 1140). Bruk regresjon til å bestemme sammenhengen.

Løsning. Med lineær regresjon (f.eks. i GeoGebra eller på kalkulator) på de fem datapunktene får vi en rett linje på formen $y = ax + b$:

$$\boxed{y \approx 94{,}55\,x + 200{,}25}.$$

Korrelasjonskoeffisienten er $r \approx 0{,}99$, som bekrefter at sammenhengen er svært nær lineær.

Oppgave 2 (6 poeng)

Oppgave. En bakteriekultur er modellert ved $B(x) = -0{,}1x^4 + 5{,}5x^3 - 150x^2 + 5500x + 200000$, der $B(x)$ er antall bakterier x timer etter start. a) Tegn grafen for $x \in [0, 60]$. b) Bestem toppunktet og skjæringspunktene med aksene. c) Tolk svarene i b). d) Bestem den momentane vekstfarten etter 40 timer.

a) Grafen tegnes i digitalt verktøy for $x \in [0, 60]$. Den starter i (0, 200000), stiger til et toppunkt rundt $x \approx 31$ timer og synker deretter til den krysser x-aksen ved ca. $x \approx 57$.

b) *Toppunkt:* der $B'(x) = 0$. Vi deriverer:

$$B'(x) = -0{,}4x^3 + 16{,}5x^2 - 300x + 5500.$$

Numerisk løsning (CAS/GeoGebra) i intervallet gir én reell rot $x \approx 31{,}3$. Funksjonsverdien der er

$$B(31{,}3) \approx 297\,870.$$

$$\boxed{\text{Toppunkt} \approx (31{,}3,\ 297\,870)}$$

Skjæring med y-aksen: $B(0) = 200000$, altså punktet $(0,\ 200000)$.

Skjæring med x-aksen: $B(x) = 0$ har én løsning i intervallet, $x \approx 56{,}7$. Punktet er $(56{,}7,\ 0)$.

$$\boxed{(0,\ 200\,000) \quad \text{og} \quad (56{,}7,\ 0)}$$

c) *Tolkning:*

- Ved start (etter 0 timer) var det 200 000 bakterier.
- Antallet bakterier vokser til det er på sitt høyeste, ca. 297 900 bakterier, etter ca. 31 timer.
- Etter ca. 57 timer er det ikke flere bakterier igjen ($B = 0$) — kulturen dør ut.

d) Den momentane vekstfarten etter 40 timer er $B'(40)$:

$$B'(40) = -0{,}4 \cdot 40^3 + 16{,}5 \cdot 40^2 - 300 \cdot 40 + 5500 = -25600 + 26400 - 12000 + 5500 = -5700.$$

$$\boxed{B'(40) = -5700 \text{ bakterier per time}}$$

Det negative fortegnet betyr at antallet bakterier **avtar** med ca. 5700 per time etter 40 timer.

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. I en klasse er det 13 gutter og 17 jenter. 8 av guttene og 9 av jentene har tatt trafikalt grunnkurs. a) Én elev trekkes tilfeldig; eleven har **ikke** tatt grunnkurset. Finn sannsynligheten for at det er en jente. b) To elever trekkes; finn sannsynligheten for at minst én har tatt grunnkurset.

Oversikt. Totalt 30 elever. Tatt kurset: $8 + 9 = 17$. Ikke tatt: 13 (gutter: $13 - 8 = 5$, jenter: $17 - 9 = 8$).

a) Dette er en betinget sannsynlighet. Blant de 13 som ikke har tatt kurset, er 8 jenter:

$$P(\text{jente} \mid \text{ikke tatt}) = \frac{8}{13} \approx 0{,}62.$$

$$\boxed{P = \frac{8}{13} \approx 0{,}62}$$

b) Lettest via komplementet: $P(\text{minst én tatt}) = 1 - P(\text{ingen tatt})$. Vi trekker 2 av 30 uten tilbakelegging; 13 har ikke tatt kurset:

$$P(\text{ingen tatt}) = \frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{156}{870} = \frac{26}{145}.$$

$$P(\text{minst én tatt}) = 1 - \frac{26}{145} = \frac{119}{145} \approx 0{,}82.$$

$$\boxed{P(\text{minst én}) = \frac{119}{145} \approx 0{,}82}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. En tomt $ABCD$ har rett vinkel i A, med $AD = 80$ m, $AB = 70$ m, $BC = 70$ m og $DC = 100$ m (se figuren). Bestem arealet ved regning.

Løsning. Vi deler firkanten i to trekanter med diagonalen DB.

Trekant ABD er rettvinklet i A med katetene $AB = 70$ og $AD = 80$. Arealet er

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 80 = 2800 \text{ m}^2,$$

og diagonalen blir

$$DB = \sqrt{70^2 + 80^2} = \sqrt{4900 + 6400} = \sqrt{11300} = 10\sqrt{113} \approx 106{,}30 \text{ m}.$$

Trekant DBC har de tre sidene $DB \approx 106{,}30$, $BC = 70$ og $DC = 100$. Vi bruker Herons formel med halv omkrets $s = \dfrac{106{,}30 + 70 + 100}{2} \approx 138{,}15$:

$$A_{DBC} = \sqrt{s(s - DB)(s - BC)(s - DC)} \approx \sqrt{138{,}15 \cdot 31{,}85 \cdot 68{,}15 \cdot 38{,}15} \approx 3382 \text{ m}^2.$$

Samlet areal:

$$A = A_{ABD} + A_{DBC} \approx 2800 + 3382 = \boxed{6182 \text{ m}^2}.$$

Merk: Man kan også først finne vinkelen $\angle DBC$ med cosinussetningen og deretter bruke arealformelen $\frac{1}{2} \cdot DB \cdot BC \cdot \sin(\angle DBC)$ — det gir samme svar.

Oppgave 5 (4 poeng)

Oppgave. To ulike trekanter ABC har $\angle A = 40^\circ$, $BC = 6{,}0$ cm og $AC = 9{,}0$ cm. a) Lag en skisse som viser hvordan de to trekantene kan se ut. b) Sett opp uttrykk og bestem lengden av AB i hver trekant.

Bakgrunn. Dette er det «tvetydige tilfellet» (SSA): vi kjenner en vinkel, den motstående siden ($BC = a = 6$ ligger overfor $\angle A$) og en annen side ($AC = b = 9$). Siden $b > a$, finnes det to mulige trekanter.

a) Skissen viser at punktet B kan plasseres på to måter: i den ene trekanten er $\angle B$ spiss, i den andre er $\angle B$ stump. Begge har samme $\angle A = 40^\circ$, $AC = 9$ og $BC = 6$.

b) Vi bruker **sinussetningen** for å finne $\angle B$ (vinkelen ved B, overfor siden $AC = 9$):

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC} \implies \sin B = \frac{9 \cdot \sin 40^\circ}{6} \approx \frac{9 \cdot 0{,}643}{6} \approx 0{,}964.$$

Dette gir to mulige vinkler:

$$B_1 \approx 74{,}6^\circ \qquad \text{eller} \qquad B_2 = 180^\circ - 74{,}6^\circ = 105{,}4^\circ.$$

Trekant 1 ($\angle B \approx 74{,}6^\circ$): da er $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 74{,}6^\circ = 65{,}4^\circ$. Sinussetningen gir

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{6 \cdot \sin 65{,}4^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 8{,}5 \text{ cm}.$$

Trekant 2 ($\angle B \approx 105{,}4^\circ$): da er $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 105{,}4^\circ = 34{,}6^\circ$, og

$$AB = \frac{6 \cdot \sin 34{,}6^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5{,}3 \text{ cm}.$$

$$\boxed{AB \approx 8{,}5 \text{ cm} \quad \text{eller} \quad AB \approx 5{,}3 \text{ cm}}$$

Oppgave 6 (4 poeng)

Oppgave. Gitt $f(x) = ax + 4$ og $g(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$. a) Illustrer grafisk at $f(x) = g(x)$ kan ha ingen, én eller to løsninger avhengig av a. b) Bestem ved regning verdiene av a som gir ingen, én og to løsninger.

a) Grafisk er løsningene skjæringspunktene mellom linja $f(x) = ax + 4$ og hyperbelen $g(x) = \frac{2}{x}$. Linja går alltid gjennom $(0, 4)$. Når man dreier linja (endrer a), kan den skjære hyperbelen i to punkter, akkurat tangere den i ett punkt, eller ikke treffe den i det hele tatt. Tegn linja for f.eks. $a = 1$ (to skjæringer), $a = -2$ (én, tangering) og $a = -3$ (ingen).

b) Sett $f(x) = g(x)$:

$$ax + 4 = \frac{2}{x}.$$

Gang med x (lov siden $x \neq 0$):

$$ax^2 + 4x = 2 \implies ax^2 + 4x - 2 = 0.$$

Spesialtilfelle $a = 0$: likningen blir lineær, $4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ — altså **én løsning**.

Når $a \neq 0$ er det en andregradslikning. Antall løsninger styres av diskriminanten:

$$D = 4^2 - 4 \cdot a \cdot (-2) = 16 + 8a.$$

- **Ingen løsning:** $D < 0 \Rightarrow 16 + 8a < 0 \Rightarrow \boxed{a < -2}$

- **Én løsning:** $D = 0 \Rightarrow a = -2$, eller det lineære tilfellet $a = 0$. Altså $\boxed{a = -2 \text{ eller } a = 0}$
- **To løsninger:** $D > 0$ og $a \neq 0 \Rightarrow \boxed{a > -2 \text{ og } a \neq 0}$

Oppgave 7 (4 poeng)

Oppgave. Gitt $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(0,4)$. Punktet P ligger på linja l gjennom B og C. a) Forklar at P kan skrives på formen $\left(x,\ -\frac{4}{5}x+4\right)$. b) Bestem ved regning P slik at arealet av $\triangle ABP$ blir halvparten av arealet av $\triangle ABC$.

a) Linja l gjennom $B(5,0)$ og $C(0,4)$ har stigningstall

$$k = \frac{4-0}{0-5} = -\frac{4}{5},$$

og skjæring med y-aksen i C gir konstantleddet 4. Linja er altså $y = -\frac{4}{5}x + 4$. Et vilkårlig punkt P på l har en x-koordinat, og y-koordinaten er gitt av linjelikningen:

$$P = \left(x,\ -\frac{4}{5}x + 4\right). \checkmark$$

b) Først arealet av $\triangle ABC$. Grunnlinja AB ligger langs x-aksen med lengde 5, og høyden er y-koordinaten til C, altså 4:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10.$$

For $\triangle ABP$ er grunnlinja $AB = 5$, og høyden er y-koordinaten til P (avstanden fra P ned til x-aksen). Vi vil at

$$A_{ABP} = \frac{1}{2}A_{ABC} = 5 \implies \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot y_P = 5 \implies y_P = 2.$$

Sett $y_P = 2$ inn i linjelikningen:

$$-\frac{4}{5}x + 4 = 2 \implies -\frac{4}{5}x = -2 \implies x = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$$\boxed{P = (2{,}5,\ 2)}$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Per er hele tiden 52 trappetrinn foran Kari. Når Per har kommet halvveis, sier han: «Når jeg er helt oppe, er du kommet tre ganger så langt som du er nå.» Hvor mange trappetrinn er det i tårnet?

Løsning. La N være antall trappetrinn i tårnet. Når Per er halvveis, har han gått $\frac{N}{2}$ trinn, og Kari ligger 52 bak: hun har gått $\frac{N}{2} - 52$ trinn.

Når Per er helt oppe (N trinn), er Kari fortsatt 52 bak: hun har gått $N - 52$ trinn. Dette skal være tre ganger så mye som hun hadde gått da Per var halvveis:

$$N - 52 = 3\left(\frac{N}{2} - 52\right).$$

Løs for N:

$$N - 52 = \frac{3N}{2} - 156 \implies 104 = \frac{3N}{2} - N = \frac{N}{2} \implies N = 208.$$

$$\boxed{\text{208 trappetrinn}}$$

Kontroll: Halvveis har Kari gått $104 - 52 = 52$ trinn. Helt oppe har hun gått $208 - 52 = 156 = 3 \cdot 52$ trinn. ✓

Oppgave 9 (6 poeng)

Oppgave. En figur er satt sammen av et rektangel med lengde x og bredde b, og et kvadrat med side x. Samlet areal er c. a) Forklar at x må være løsning av $x^2 + bx = c$. Babylonerne løste slike likninger geometrisk. b) Vis at arealet av kvadratet $ABCD$ er $c + \frac{b^2}{4}$. c) Forklar hvorfor x må være den positive løsningen av $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$. d) Bruk c) til å vise at $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$.

a) Kvadratet har areal $x \cdot x = x^2$, og rektangelet har areal $b \cdot x = bx$. Til sammen er arealet c:

$$x^2 + bx = c. \checkmark$$

b) Babylonernes triks: del rektangelet (bx) i to like remser på $\frac{b}{2} \cdot x$ og legg den ene remsa langs en annen side av kvadratet. Den nye figuren mangler bare et lite hjørnekvadrat med side $\frac{b}{2}$ for å bli et fullt kvadrat $ABCD$. Arealet av det opprinnelige (blå) området er fortsatt c, og vi fyller inn hjørnekvadratet med areal

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}.$$

Det store kvadratet $ABCD$ har dermed areal

$$A_{ABCD} = c + \frac{b^2}{4}. \checkmark$$

c) Det store kvadratet $ABCD$ har sidelengde $x + \frac{b}{2}$ (den opprinnelige siden x pluss den tilflyttede remsa på $\frac{b}{2}$). Arealet er da $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Setter vi de to uttrykkene for arealet lik hverandre:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}.$$

Siden x er en geometrisk lengde, må den være positiv — derfor velger vi den positive løsningen. ✓

d) Vi løser likningen fra c). Ta kvadratrot på begge sider:

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

(vi tar den positive roten siden $x + \frac{b}{2} > 0$). Da er

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}.$$

Skriv uttrykket under rottegnet med fellesnevner 4:

$$\sqrt{c + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4c + b^2}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Dermed:

$$x = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}. \checkmark$$

$$\boxed{x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}}$$

Dette er nettopp *abc*-formelen anvendt på $x^2 + bx - c = 0$ (med den positive roten) — utledet rent geometrisk, slik babylonerne gjorde for 4000 år siden.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.