

Matematikk 1T — Høst 2015

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $1,8 \cdot 10^{12} \cdot 0,0005$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi skriver $0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ og multipliserer:

$$1,8 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = (1,8 \cdot 5) \cdot 10^{12-4} = 9 \cdot 10^8.$$

$$\boxed{9 \cdot 10^8}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $2x + 3y = 13$ og $4x - 2y = 2$.

Løsning. Vi bruker addisjonsmetoden. Multipliser den første likningen med 2:

$$4x + 6y = 26$$

$$4x - 2y = 2$$

Trekk den andre fra den første: $8y = 24 \Rightarrow y = 3$. Sett inn i $2x + 3y = 13$:

$$2x + 9 = 13 \Rightarrow x = 2.$$

$$\boxed{x = 2, \quad y = 3}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $-2x^2 + 6x < 0$.

Løsning. Faktoriser venstresiden: $-2x^2 + 6x = -2x(x - 3)$. Nullpunktene er $x = 0$ og $x = 3$. Parabelen $y = -2x^2 + 6x$ åpner **nedover** (negativ ledende koeffisient), så uttrykket er negativt *utenfor* nullpunktene:

$$\boxed{x < 0 \text{ eller } x > 3}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv så enkelt som mulig: $(\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{8}}{2} + \sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$.

Løsning. Vi forenkler ledd for ledd:

- $(\sqrt{2})^2 = 2$
- $\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$

Setter vi sammen:

$$2 - \sqrt{2} + 2 - 4 = -\sqrt{2}.$$

$$\boxed{-\sqrt{2}}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Likningen $x^2 + bx + c = 0$ har løsningene $x_1 = -4$ og $x_2 = 2$. Bestem b og c .

Løsning. Når et andregradsuttrykk med ledende koeffisient 1 har røttene x_1 og x_2 , kan det skrives som $(x - x_1)(x - x_2)$:

$$x^2 + bx + c = (x - (-4))(x - 2) = (x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8.$$

Sammenlign koeffisienter:

$$\boxed{b = 2, \quad c = -8}$$

Kontroll (Vietas formler): $x_1 + x_2 = -b \Rightarrow -4 + 2 = -2 = -b$, og $x_1 x_2 = c \Rightarrow (-4)(2) = -8 = c$.
✓

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{2x-2} + \frac{1}{2}$.

Løsning. Legg merke til at $2x-2 = 2(x-1)$. Fellesnevner blir $2(x-1)$:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{2(x-1)} + \frac{1}{2} = \frac{2(x+1)}{2(x-1)} - \frac{x-3}{2(x-1)} + \frac{x-1}{2(x-1)}.$$

Slå sammen tellerne:

$$\frac{2(x+1) - (x-3) + (x-1)}{2(x-1)} = \frac{2x+2-x+3+x-1}{2(x-1)} = \frac{2x+4}{2(x-1)} = \frac{2(x+2)}{2(x-1)}.$$

$$\boxed{\frac{x+2}{x-1}}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{3xy - 6y^2}$.

Løsning. Telleren er et fullstendig kvadrat, og nevneren har felles faktor $3y$:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2, \quad 3xy - 6y^2 = 3y(x-2y).$$

Dermed

$$\frac{(x-2y)^2}{3y(x-2y)} = \frac{x-2y}{3y}.$$

$$\boxed{\frac{x-2y}{3y}}$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 32$.

Løsning. Bruk potensregelen $2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 2^{4x+x^2}$ og skriv $32 = 2^5$:

$$2^{x^2+4x} = 2^5 \implies x^2 + 4x = 5 \implies x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Faktoriser: $(x+5)(x-1) = 0$, så

$$\boxed{x = -5 \text{ eller } x = 1}$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Oppgave. Bestem arealet av $\triangle ABC$ (figur). Trekanten er rettvinklet i A , har $\angle B = 45^\circ$ og hypotenus $BC = \sqrt{2}$.

Løsning. Med rett vinkel i A og $\angle B = 45^\circ$ blir også $\angle C = 45^\circ$, så trekanten er likebeint: katetene AB og AC er like lange. Kall lengden k . Pytagoras gir

$$k^2 + k^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \implies 2k^2 = 2 \implies k = 1.$$

Arealet av den rettvinklede trekanten er

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Oppgave 10 (9 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - x - 2$. a) Nullpunkter. b) Vis at bunnpunktet er $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$. c) Tangenten i $(2, f(2))$. d) En linje l gjennom $(3, 7)$ parallell med tangenten i c); finn skjæringspunktene mellom l og grafen. e) Tegn alt i samme koordinatsystem.

a) Nullpunktene løses med faktorisering eller abc-formelen:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \implies \boxed{x = -1 \text{ og } x = 2}.$$

b) Bunnpunktet ligger der $f'(x) = 0$. Vi deriverer:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

y -verdien:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

Siden parabolen åpner oppover, er dette et bunnpunkt:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)}.$$

c) Tangenten i $x = 2$. Vi har $f(2) = 4 - 2 - 2 = 0$ og $f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Tangentlikningen:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \implies y = 3(x - 2) + 0 = 3x - 6.$$

$$\boxed{y = 3x - 6}$$

d) Linjen l er parallell med tangenten, altså stigningstall 3, og går gjennom $(3, 7)$:

$$y = 3(x - 3) + 7 = 3x - 2.$$

Skjæring med grafen: sett $f(x) = 3x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = 3x - 2 \implies x^2 - 4x = 0 \implies x(x - 4) = 0.$$

Det gir $x = 0$ og $x = 4$. Tilhørende y -verdier (fra $y = 3x - 2$): $y(0) = -2$ og $y(4) = 10$.

$$\boxed{(0, -2) \text{ og } (4, 10)}$$

e) I samme koordinatsystem tegnes:

- **Parabelen** $f(x) = x^2 - x - 2$ — nullpunkter $x = -1$ og $x = 2$, bunnpunkt $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, skjærer y -aksen i $(0, -2)$.
- **Tangenten** $y = 3x - 6$ — berører parabelen i $(2, 0)$.
- **Linjen** $l: y = 3x - 2$ — parallell med tangenten, krysser parabelen i $(0, -2)$ og $(4, 10)$.

Tangenten og linjen l er parallelle (begge har stigningstall 3).

Oppgave 11 (2 poeng)

Oppgave. To formlike trapeser. Det minste har høyde h og areal A ; det største har høyde $3h$. Vis ved formelregning at det største har areal $9A$.

Løsning. Arealet av et trapes er $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$, der a og b er de parallelle sidene. Når to figurer er formlike og linjeforholdet (målestokken) er 3, blir **alle** lengder ganget med 3. De parallelle sidene i det store trapeset er derfor $3a$ og $3b$, og høyden er $3h$:

$$A_{\text{stor}} = \frac{3a + 3b}{2} \cdot 3h = \frac{3(a+b)}{2} \cdot 3h = 9 \cdot \frac{(a+b)}{2} \cdot h = 9A.$$

$$\boxed{A_{\text{stor}} = 9A}$$

Generelt: når linjeforholdet er k , er arealforholdet k^2 . Her er $k = 3$, så arealforholdet er $3^2 = 9$.

Oppgave 12 (4 poeng)

Oppgave. En sykdomstest prøves på 360 personer; 60 er smittet. 68 tester positivt, og av disse er 10 ikke smittet. a) Fyll ut krysstabell. b) $P(\text{positiv} \mid \text{smittet})$. c) $P(\text{ikke smittet} \mid \text{positiv})$.

a) Vi fyller inn det vi vet og regner ut resten:

- Smittet: 60 \rightarrow ikke smittet: $360 - 60 = 300$.
- Tester positivt: 68, hvorav 10 ikke er smittet $\rightarrow 68 - 10 = 58$ smittede tester positivt.
- Smittet som *ikke* tester positivt: $60 - 58 = 2$.
- Ikke smittet som *ikke* tester positivt: $300 - 10 = 290$.

- Tester ikke positivt totalt: $360 - 68 = 292$.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt	2	290	292
Sum	60	300	360

b) Sannsynligheten for at en *smittet* person tester positivt:

$$P(\text{positiv} \mid \text{smittet}) = \frac{58}{60} = \frac{29}{30} \approx 0,967.$$

$$\boxed{P \approx 0,97}$$

c) Sannsynligheten for at en som *tester positivt* likevel ikke er smittet:

$$P(\text{ikke smittet} \mid \text{positiv}) = \frac{10}{68} = \frac{5}{34} \approx 0,147.$$

$$\boxed{P \approx 0,15}$$

Oppgave 13 (2 poeng)

Oppgave. I $\triangle ABC$ er $\angle B = 90^\circ$ og $\tan A = \frac{5}{12}$. Bestem $\cos C$.

Løsning. Med rett vinkel i B er $\angle A + \angle C = 90^\circ$, altså $C = 90^\circ - A$. Da er

$$\cos C = \cos(90^\circ - A) = \sin A.$$

Fra $\tan A = \frac{5}{12}$ tegner vi en rettvinklet trekant med motstående katet 5 og hosliggende katet 12. Hypotenusen blir

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Dermed er $\sin A = \frac{5}{13}$, og

$$\boxed{\cos C = \frac{5}{13}}$$

Oppgave 14 (2 poeng)

Oppgave. Gitt $\triangle ABC$ med $BC = 20$, $AC = 13$ og $\sin B = \frac{3}{5}$. Bestem arealet av trekanten.

Løsning. Vi bruker standard sidenavn: $a = BC = 20$ (motstående A) og $b = AC = 13$ (motstående B). La $c = AB$ være den ukjente siden. Siden $\sin B = \frac{3}{5}$, er $\cos B = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Vi tar $\cos B = \frac{4}{5}$ (spiss vinkel, i tråd med figuren) og bruker cosinussetningen på siden motstående B :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \implies 169 = 400 + c^2 - 2 \cdot 20 \cdot c \cdot \frac{4}{5},$$

som gir $c^2 - 32c + 231 = 0$. Abc-formelen:

$$c = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 231}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 924}}{2} = \frac{32 \pm 10}{2},$$

altså $c = 21$ eller $c = 11$. Figuren viser trekanten der AB er den **lengste** siden (og vinkel A er spiss), noe som svarer til $c = AB = 21$. Arealet er da

$$A = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \cdot \frac{3}{5} = 126.$$

$$\boxed{A = 126}$$

Merknad (SSA). Reint algebraisk gir likningen $c^2 - 32c + 231 = 0$ to positive løsninger, $c = 21$ og $c = 11$ (det tvetydige SSA-tilfellet, siden $AC = 13 < BC = 20$). Verdien $c = 11$ svarer til en *annen* trekant med areal $A = 6 \cdot 11 = 66$. Denne trekanten passer ikke figuren (der ville AB vært den korteste siden og vinkel A stump), så det er $c = 21$ og $A = 126$ som er svaret på oppgaven slik den er stilt med figur.

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Oppgave. Søylediagram viser antall registrerte elbiler i Norge 2000–2007 (383, 607, 832, 1081, 1193, 1352, 1667, 1905) veksten var tilnærmet lineær. a) La $x =$ antall år etter 2000; finn en lineær modell f . b) Hvordan passer modellen med tallene 2432 (2008), 9580 (2012) og 41 051 (2014)?

a) Vi gjør lineær regresjon på punktene $(0, 383)$, $(1, 607)$, \dots , $(7, 1905)$ med digitalt verktøy (regresjon / «tilpass linje»). Det gir

$$\boxed{f(x) \approx 210x + 393}.$$

Modellen sier at antallet elbiler økte med omtrent 210 per år i perioden 2000–2007.

b) Vi setter inn årene (husk $x =$ år etter 2000):

År	x	Modell $f(x)$	Faktisk
2008	8	≈ 2070	2432
2012	12	≈ 2910	9580
2014	14	≈ 3330	41 051

For 2008 er modellen rimelig nær, men allerede i 2012 og spesielt i 2014 ligger den langt under de faktiske tallene. Den lineære modellen passer altså **dårlig** etter 2007: den faktiske utviklingen var ikke lineær, men eksponentiell (mye raskere vekst). En lineær modell kan ikke fange opp den eksplosive veksten i elbilsalget etter 2010.

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Et kvadrat med side 6 er delt i tre blå trekanter (med likt areal) og én hvit, likebeint trekant (se figur). Bestem et eksakt uttrykk for arealet av den hvite trekanten.

Løsning. Legg kvadratet i et koordinatsystem med hjørner $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 6)$, $(0, 6)$. Ut fra figuren har den hvite trekanten ett hjørne i nedre høyre hjørne $R = (6, 0)$, ett punkt $P = (0, p)$ på venstre side og ett punkt $Q = (q, 6)$ på toppen. De tre blå trekantene er da:

- B_1 (øverst til venstre): rettvinklet med kateter q og $6 - p$, areal $\frac{1}{2}q(6 - p)$.
- B_2 (nederst): rettvinklet med kateter 6 og p , areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot p = 3p$.
- B_3 (til høyre): rettvinklet med kateter $6 - q$ og 6, areal $\frac{1}{2}(6 - q) \cdot 6 = 3(6 - q)$.

Kravet om likt areal, $B_1 = B_2 = B_3$, gir to likninger. Løses med CAS:

$$p = 9 - 3\sqrt{5}, \quad q = 3\sqrt{5} - 3.$$

Den hvite trekanten har areal lik hele kvadratet minus de tre blå:

$$A_{\text{hvit}} = 36 - 3B_2 = 36 - 3 \cdot 3p = 36 - 9(9 - 3\sqrt{5}) = 36 - 81 + 27\sqrt{5} = 27\sqrt{5} - 45.$$

$$A_{\text{hvit}} = 27\sqrt{5} - 45 \approx 15,4$$

Kontroll: Avstandene $PR = QR = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$ er like, så trekanten er likebeint — i samsvar med oppgaven. Hver blå trekant har areal $27 - 9\sqrt{5} \approx 6,9$, og $3(27 - 9\sqrt{5}) + (27\sqrt{5} - 45) = 36$. ✓

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - x - 2$. a) Tegn med graftegner: grafen til f , sekanten gjennom $(1, f(1))$ og $(3, f(3))$, sekanten gjennom $(0, f(0))$ og $(4, f(4))$, og tangenten i $(2, f(2))$. b) Bruk CAS til å vise at tangenten i $(c, f(c))$ er parallell med sekanten gjennom $(c - h, f(c - h))$ og $(c + h, f(c + h))$.

a) Med graftegner (GeoGebra e.l.) tegnes alle fire linjene/kurvene i samme vindu:

- Parabelen $f(x) = x^2 - x - 2$ (nullpunkter -1 og 2 , bunnpunkt $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$).
- Sekanten gjennom $(1, f(1)) = (1, -2)$ og $(3, f(3)) = (3, 4)$. Stigningstall $\frac{4 - (-2)}{3 - 1} = 3$.

- Sekanten gjennom $(0, f(0)) = (0, -2)$ og $(4, f(4)) = (4, 10)$. Stigningstall $\frac{10 - (-2)}{4 - 0} = 3$.
- Tangenten i $(2, f(2)) = (2, 0)$, som har stigningstall $f'(2) = 3$.

Observasjon: alle tre rette linjene er **parallelle** (stigningstall 3). Det skyldes at de to sekantene er symmetriske om $x = 2$ (de har midtpunkt i $x = 2$), og tangentpunktet er nettopp $x = 2$. Dette er hovedpoenget som bevises generelt i b).

b) Vi bruker CAS. La $f(x) = x^2 - x - 2$.

Stigningstall til tangenten i $x = c$:

$$f'(x) = 2x - 1, \quad f'(c) = 2c - 1.$$

Stigningstall til sekanten gjennom $(c - h, f(c - h))$ og $(c + h, f(c + h))$:

$$a_{\text{sek}} = \frac{f(c + h) - f(c - h)}{(c + h) - (c - h)}.$$

Regn ut telleren:

$$f(c + h) - f(c - h) = [(c + h)^2 - (c + h) - 2] - [(c - h)^2 - (c - h) - 2].$$

Vi bruker $(c + h)^2 - (c - h)^2 = 4ch$ og $-(c + h) + (c - h) = -2h$:

$$f(c + h) - f(c - h) = 4ch - 2h = 2h(2c - 1).$$

Nevneren er $2h$, så

$$a_{\text{sek}} = \frac{2h(2c - 1)}{2h} = 2c - 1.$$

Vi ser at $a_{\text{sek}} = 2c - 1 = f'(c)$. Tangenten og sekanten har altså **samme stigningstall** for alle c og alle $h \neq 0$, og er derfor **parallelle**. ■

CAS (eksempel, GeoGebra-syntaks):

```
f(x) := x^2 - x - 2
tangent := f'(c)
sekant := (f(c + h) - f(c - h)) / (2h)
Forenkle(tangent - sekant) → 0
```

At differansen er 0 viser at stigningstallene er like.

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Et rektangel har areal $\frac{3}{8}$ og omkrets $\frac{5}{2}$. Finn lengde og bredde.

Løsning. La l være lengden og b bredden. Omkrets $2(l + b) = \frac{5}{2}$ gir $l + b = \frac{5}{4}$, og areal gir $l \cdot b = \frac{3}{8}$.

Da er l og b røttene til andregradslikningen $t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{3}{8} = 0$. Multipliser med 8:

$$8t^2 - 10t + 3 = 0 \implies t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{16} = \frac{10 \pm 2}{16}.$$

Det gir $t = \frac{3}{4}$ og $t = \frac{1}{2}$.

Lengde = $\frac{3}{4}$, bredde = $\frac{1}{2}$
--

Kontroll: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \checkmark$ og $2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \checkmark$.

Oppgave 5 (5 poeng)

Oppgave. En avisoverskrift sier «Fire av fem kjøretøy i kollektivfeltet er elbiler». Sitatet: daglig ble det registrert ca. 1350 elbiler, 120 busser og 100 drosjer i kollektivfeltet. a) Vurder om sitatet gir grunnlag for overskriften. b/c) Anta at fire av fem kjøretøy er elbiler. Bestem sannsynligheten for at av de tre neste kjøretøyene er b) nøyaktig ett elbil, c) minst to elbiler.

a) Sitatet teller bare elbiler, busser og drosjer — til sammen $1350 + 120 + 100 = 1570$ kjøretøy. Andelen elbiler er

$$\frac{1350}{1570} \approx 0,86 \approx 86 \%$$

«Fire av fem» betyr $\frac{4}{5} = 80 \%$. Hvis dette virkelig var *alle* kjøretøyene i kollektivfeltet, gir tallene faktisk grunnlag for overskriften (andelen er til og med litt høyere enn 80 %). **Men** sitatet nevner kun tre kjøretøytyper; vanlige biler, motorsykler, lastebiler osv. som lovlig (eller ulovlig) bruker kollektivfeltet er ikke regnet med. Hvis det også kjørte mange slike, er den reelle elbilandelen lavere, og overskriften kan være misvisende. Konklusjon: sitatet **kan** støtte overskriften dersom de tre typene utgjør (tilnærmet) alle kjøretøyene, men datagrunnlaget er ufullstendig, så påstanden bør tolkes med forsiktighet.

b) Hvert kjøretøy er elbil med sannsynlighet $p = \frac{4}{5} = 0,8$, uavhengig av de andre. Antall elbiler blant tre kjøretøy er binomisk fordelt, $X \sim \text{bin}(n = 3, p = 0,8)$. Sannsynligheten for **nøyaktig ett**:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{25} = \frac{12}{125} = 0,096.$$

$P(X = 1) = \frac{12}{125} \approx 0,096$

c) **Minst to** betyr $X = 2$ eller $X = 3$:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = 3 \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{48}{125},$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}.$$

$$P(X \geq 2) = \frac{48}{125} + \frac{64}{125} = \frac{112}{125} = 0,896.$$

$$P(X \geq 2) = \frac{112}{125} \approx 0,896$$

Oppgave 6 (7 poeng)

Oppgave. Gitt $\triangle ABC$ med $\angle A = 45^\circ$, $BC = 6$ og $AC = 8$. a) Bruk CAS til å finne AB eksakt. Sett deretter $BC = a$. b) Lag skisser som viser at man kan få to, én eller ingen trekant. Sett $AB = x$. c) Bruk CAS til å finne for hvilke a likningen $a^2 = 8^2 + x^2 - 16x \cos 45^\circ$ har to positive løsninger / én løsning / ingen løsning (eksakte verdier). d) Vurder om svarene i c) samsvarer med skissene i b).

a) Vi bruker cosinussetningen på siden $BC = a = 6$, som ligger motstående $\angle A = 45^\circ$. Med $AC = 8$ og $AB = x$:

$$a^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A \implies 6^2 = 8^2 + x^2 - 16x \cos 45^\circ.$$

Med $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ blir $16x \cos 45^\circ = 8\sqrt{2}x$, så likningen er

$$x^2 - 8\sqrt{2}x + 28 = 0.$$

CAS gir

$$x = \frac{8\sqrt{2} \pm \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \pm \sqrt{128 - 112}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \pm 4}{2} = 4\sqrt{2} \pm 2.$$

Begge røttene er positive, så det finnes to mulige lengder for AB :

$$AB = 4\sqrt{2} + 2 \text{ eller } AB = 4\sqrt{2} - 2$$

(omtrent 7,66 eller 3,66). Dette er det tvetydige tilfellet — to trekanter passer dataene.

b) Skisser (kvalitativt). Punktet A er fast med $\angle A = 45^\circ$, og C ligger på det ene vinkelbeinet med $AC = 8$. Den ukjente siden $a = BC$ tegnes som en sirkel med radius a og sentrum i C ; trekanten dannes der sirkelen treffer det andre vinkelbeinet (linjen gjennom A):

- **Ingen trekant:** Hvis a er for liten, når ikke sirkelen helt fram til vinkelbeinet — den krysser ikke linjen. Avstanden fra C ned til vinkelbeinet er høyden $h = AC \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Når $a < 4\sqrt{2}$ er det ingen løsning.
- **Én trekant (tangering):** Når $a = 4\sqrt{2}$ tangerer sirkelen vinkelbeinet i ett punkt — en rettvinklet trekant.
- **To trekanter:** Når $4\sqrt{2} < a < 8$ skjærer sirkelen vinkelbeinet i to punkter på samme side av A , så det finnes to ulike trekanter.
- **Én trekant igjen:** Når $a \geq 8$ (altså $a \geq AC$) treffer sirkelen vinkelbeinet i bare ett punkt på riktig side (det andre skjæringspunktet havner på motsatt side av A og gir negativ x), så det er én trekant.

c) Skriv likningen som $x^2 - 8\sqrt{2}x + (64 - a^2) = 0$. Diskriminanten er

$$D = (8\sqrt{2})^2 - 4(64 - a^2) = 128 - 256 + 4a^2 = 4a^2 - 128 = 4(a^2 - 32).$$

Vi trenger også fortegnet på røttene. Etter Vietas formler er summen $x_1 + x_2 = 8\sqrt{2} > 0$ og produktet $x_1x_2 = 64 - a^2$.

- **To positive løsninger:** krever $D > 0$ og produktet > 0 :

$$4(a^2 - 32) > 0 \Rightarrow a > 4\sqrt{2}, \quad 64 - a^2 > 0 \Rightarrow a < 8.$$

Begge oppfylt for $4\sqrt{2} < a < 8$. (Summen er alltid positiv.)

$$\boxed{4\sqrt{2} < a < 8}$$

- **Én (positiv) løsning:** enten dobbeltrot ($D = 0$), eller én positiv og én ikke-positiv rot (produkt ≤ 0):

$$a = 4\sqrt{2} \quad (\text{dobbeltrot } x = 4\sqrt{2}) \quad \text{eller} \quad a \geq 8 \quad (64 - a^2 \leq 0).$$

$$\boxed{a = 4\sqrt{2} \text{ eller } a \geq 8}$$

- **Ingen løsning:** $D < 0$:

$$4(a^2 - 32) < 0 \Rightarrow a^2 < 32 \Rightarrow a < 4\sqrt{2}.$$

$$\boxed{0 < a < 4\sqrt{2}}$$

CAS (eksempel, GeoGebra-syntaks):

Løs($a^2 = 8^2 + x^2 - 16x \cdot \cos(45^\circ)$, x)

$\rightarrow x = 4\sqrt{2} - \sqrt{(4a^2 - 112)}/\dots$ (CAS gir to uttrykk i a)

Diskriminant: $D = (8\sqrt{2})^2 - 4(64 - a^2) = 4a^2 - 128$

Løs($4a^2 - 128 > 0$, a) $\rightarrow a > 4\sqrt{2}$ (med $a > 0$)

d) Svarene i c) stemmer fullt ut med skissene i b):

- $a < 4\sqrt{2}$: ingen positiv løsning sirkelen når ikke vinkelbeinet \rightarrow **ingen trekant**.
- $a = 4\sqrt{2}$: én (dobbel) løsning sirkelen tangerer \rightarrow **én (rettvinklet) trekant**.
- $4\sqrt{2} < a < 8$: to positive løsninger to skjæringspunkter \rightarrow **to trekanter** (samsvarer med a), der $a = 6$ ligger i dette intervallet og ga $AB = 4\sqrt{2} \pm 2$.
- $a \geq 8$: én positiv løsning ett gyldig skjæringspunkt \rightarrow **én trekant**.

Den algebraiske analysen (antall positive løsninger) gir altså nøyaktig samme inndeling som den geometriske (antall mulige trekanter). ✓

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.