Matematikk 1T — Høst 2016

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $5x = -2y$ og $2x - y = -9$.

Løsning. Fra den første likningen er $5x = -2y$, altså $y = -\frac{5}{2}x$. Sett dette inn i den andre likningen:

$$2x - \left(-\tfrac{5}{2}x\right) = -9 \implies 2x + \tfrac{5}{2}x = -9 \implies \tfrac{9}{2}x = -9 \implies x = -2.$$

Da blir $y = -\frac{5}{2} \cdot (-2) = 5$.

$$\boxed{x = -2, \quad y = 5}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$.

Løsning. Faktoriser teller og nevner:

$$2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x-1)(x+1), \qquad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Dermed forkortes uttrykket med felles faktor $(x - 1)$:

$$\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{2(x+1)}{x-1}}, \qquad x \neq 1.$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $-x^2 + 3x > -10$.

Løsning. Flytt alt over på én side:

$$-x^2 + 3x + 10 > 0 \iff x^2 - 3x - 10 < 0.$$

Nullpunktene til $x^2 - 3x - 10$ er

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \implies x = -2 \text{ eller } x = 5.$$

Parabelen $x^2 - 3x - 10$ åpner oppover, så den er negativ *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-2 < x < 5}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $\lg\left(2x + \frac{3}{5}\right) = -1$.

Løsning. lg er logaritmen med grunntall 10. Bruker vi definisjonen $\lg a = -1 \Leftrightarrow a = 10^{-1}$, får vi

$$2x + \frac{3}{5} = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$$

Løser for x:

$$2x = \frac{1}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10} - \frac{6}{10} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} \implies x = -\frac{1}{4}.$$

$$\boxed{x = -\tfrac{1}{4}}$$

Oppgave 5 (1 poeng)

Oppgave. Løs likningen $2^3 \cdot 2^x = 2^{2x}$.

Løsning. Samle potensene på venstresiden med potensregelen $2^3 \cdot 2^x = 2^{3+x}$:

$$2^{3+x} = 2^{2x}.$$

Like grunntall gir like eksponenter:

$$3 + x = 2x \implies x = 3.$$

$$\boxed{x = 3}$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{54}} + 2^{1/2} \cdot 3^{-1}$.

Løsning. Det første leddet samles under ett rottegn:

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{48}{54}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Det andre leddet er $2^{1/2} \cdot 3^{-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Summen blir

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{x+2}{x-3} - \dfrac{7x+14}{x^2-x-6}$.

Løsning. Faktoriser nevneren i det siste leddet: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Fellesnevner er $(x-3)(x+2)$. Det første leddet utvides med $(x+2)$:

$$\frac{(x+2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} - \frac{7x+14}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+2)^2 - (7x+14)}{(x-3)(x+2)}.$$

Teller: $(x^2+4x+4) - 7x - 14 = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$. Forkort med $(x+2)$:

$$\frac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \boxed{\frac{x-5}{x-3}}, \qquad x \neq -2,\ x \neq 3.$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Grafen til en andregradsfunksjon f er tegnet i et koordinatsystem. Bestem funksjonsuttrykket $f(x)$.

Avlesning av grafen. Fra figuren leser vi av at parabelen - har nullpunkter i $x = -2$ og $x = 4$, - skjærer y-aksen i $y = -4$, - har bunnpunkt omtrent i $(1, -4{,}5)$.

Løsning. Med nullpunkter $x = -2$ og $x = 4$ kan vi skrive $f(x) = a(x+2)(x-4)$. Konstanten a bestemmes av y-skjæringspunktet $f(0) = -4$:

$$f(0) = a \cdot 2 \cdot (-4) = -8a = -4 \implies a = \tfrac{1}{2}.$$

Dermed

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x+2)(x-4) = \boxed{\tfrac{1}{2}x^2 - x - 4}.$$

Kontroll: $f(1) = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -4{,}5$, i samsvar med bunnpunktet i figuren.

Oppgave 9 (8 poeng)

Oppgave. $f(x) = (x-1)(x-1)(x+2)$. a) Nullpunkter. b) Vis at $f(x) = x^3 - 3x + 2$. c) Finn $f'(x)$ og bestem topp-/bunnpunkter. d) Tangentlikning i $(0, 2)$. e) Vis at grafen ikke har andre tangenter parallelle med den i d).

a) $f(x) = 0$ når en av faktorene er null:

$$x - 1 = 0 \text{ (dobbel)} \quad \text{eller} \quad x + 2 = 0 \implies \boxed{x = 1 \text{ og } x = -2}.$$

b) Vi ganger ut. Først $(x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$, så

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = \boxed{x^3 - 3x + 2}.$$

c) Deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$f'(x) = 0$ gir $3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Fortegnsskjema for $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: positiv for $x < -1$, negativ for $-1 < x < 1$, positiv for $x > 1$.

- I $x = -1$ skifter f' fra $+$ til $-$: **toppunkt**. $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$.
- I $x = 1$ skifter f' fra $-$ til $+$: **bunnpunkt**. $f(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Toppunkt } (-1,\, 4), \quad \text{bunnpunkt } (1,\, 0)}$$

d) Tangenten i $(0, 2)$ har stigningstall $f'(0) = 3 \cdot 0 - 3 = -3$. Med ettpunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$:

$$y - 2 = -3(x - 0) \implies \boxed{y = -3x + 2}.$$

e) En parallell tangent har samme stigningstall, altså $f'(x) = -3$:

$$3x^2 - 3 = -3 \implies 3x^2 = 0 \implies x = 0.$$

Likningen har bare løsningen $x = 0$, som er nettopp røringspunktet fra d). Det finnes derfor ingen andre punkter på grafen der tangenten har stigningstall -3, og altså ingen andre parallelle tangenter. ∎

Oppgave 10 (2 poeng)

Oppgave. En likesidet trekant har omkrets 24. Vis at arealet er $16\sqrt{3}$.

Løsning. Omkretsen er tre like sider, så hver side er $s = \frac{24}{3} = 8$. Høyden i en likesidet trekant deler den i to rettvinklede trekanter med hypotenus 8 og grunnlinjehalvdel 4. Høyden er

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Arealet blir

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \boxed{16\sqrt{3}}. \qquad \blacksquare$$

Oppgave 11 (1 poeng)

Oppgave. Gitt $\sin u = \frac{8}{17}$ og $\cos u = \frac{15}{17}$. Bestem $\tan u$.

Løsning. Per definisjon er $\tan u = \dfrac{\sin u}{\cos u}$:

$$\tan u = \frac{8/17}{15/17} = \frac{8}{17} \cdot \frac{17}{15} = \boxed{\frac{8}{15}}.$$

Oppgave 12 (3 poeng)

Oppgave. a) For den rettvinklede trekanten med kateter 3 og 4 og hypotenus 5 (vinkel u ved siden 3): vis at $(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = 1$. b) Bruk en generell rettvinklet trekant med kateter a, b og hypotenus c (vinkel v) til å vise at $(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$ for alle $v \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$.

a) I trekanten er vinkel u ved den nederste hjørnet, med hosliggende katet 3, motstående katet 4 og hypotenus 5. Da er

$$\sin u = \frac{4}{5}, \qquad \cos u = \frac{3}{5}.$$

Setter vi inn:

$$(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = \boxed{1}. \qquad \blacksquare$$

b) I den generelle trekanten er a den motstående kateten til v, b den hosliggende, og c hypotenusen. Da er

$$\sin v = \frac{a}{c}, \qquad \cos v = \frac{b}{c}.$$

Dermed

$$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Etter Pytagoras er $a^2 + b^2 = c^2$, så brøken blir $\dfrac{c^2}{c^2} = 1$. Dette gjelder for enhver slik rettvinklet trekant, altså for alle $v \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$. $\blacksquare$

Oppgave 13 (3 poeng)

Oppgave. I en eske er det fire blå og fire røde nisser (8 til sammen). Du trekker tre nisser uten tilbakelegging og setter dem på rekke. a) Sannsynligheten for rekken **blå, rød, rød** (som på bildet). b) Sannsynligheten for én blå og to røde. c) Sannsynligheten for minst én blå.

a) Trekning uten tilbakelegging. Sannsynligheten for blå først, så rød, så rød:

$$P(\mathrm{B}, \mathrm{R}, \mathrm{R}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{48}{336} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

b) «Én blå og to røde» kan komme i tre ulike rekkefølger (BRR, RBR, RRB). Hver av dem har samme sannsynlighet $\frac{1}{7}$ (teller og nevner inneholder de samme faktorene i ulik orden), så

$$P(1 \text{ blå, } 2 \text{ røde}) = 3 \cdot \frac{1}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}.$$

c) Bruk komplementet. «Minst én blå» er det motsatte av «ingen blå» (alle tre røde):

$$P(\text{alle røde}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}.$$

Dermed

$$P(\text{minst én blå}) = 1 - \frac{1}{14} = \boxed{\frac{13}{14}}.$$

Oppgave 14 (4 poeng)

Oppgave. Tre halvsirkler står på linjen AC. $AB = a$, $BC = 4a$, så $AC = 5a$. Den blå figuren er den store halvsirkelen over AC med de to mindre halvsirklene (over AB og BC) «trukket fra». a) Omkrets uttrykt ved a. b) Areal uttrykt ved a.

Diametre og radier. De tre halvsirklene har diameter $AC = 5a$, $BC = 4a$ og $AB = a$, altså radier $\frac{5a}{2}$, $2a$ og $\frac{a}{2}$.

a) Omkrets. Randen til det blå området består av buene til alle tre halvsirklene. Buelengden til en halvsirkel med radius r er πr:

$$O = \pi \cdot \frac{5a}{2} + \pi \cdot 2a + \pi \cdot \frac{a}{2} = \pi a \left(\frac{5}{2} + 2 + \frac{1}{2} \right) = \boxed{5\pi a}.$$

b) Areal. Arealet av en halvsirkel med radius r er $\frac{1}{2}\pi r^2$. Det blå arealet er den store halvsirkelen minus de to mindre:

$$A = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{5a}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}\pi (2a)^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{25\pi a^2}{8} - 2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{8}.$$

Samler vi over fellesnevner 8:

$$A = \frac{25\pi a^2 - 16\pi a^2 - \pi a^2}{8} = \frac{8\pi a^2}{8} = \boxed{\pi a^2}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Oppgave. Antall settefisk modelleres ved $f(x) = 35\,400 \cdot 0{,}996^x$ for $x \in [0, 400]$, der x er antall døgn. a) Tegn grafen. b) Forklar hva tallene 35 400 og 0,996 betyr. c) Bestem $f'(100)$ ved å tegne en tangent, og tolk verdien. d) Gjennomsnittlig vekstfart det første året.

a) Graf. Grafen til f er en synkende eksponentialkurve. Den starter i $f(0) = 35\,400$ (ved $x = 0$) og avtar mot lavere verdier; ved $x = 400$ er $f(400) = 35\,400 \cdot 0{,}996^{400} \approx 7\,124$ fisk. I et digitalt graftegningsverktøy (GeoGebra) skriver man inn `f(x) = 35400 * 0.996^x` med $0 \leq x \leq 400$.

b) Tolkning av tallene.

- 35 400 er startverdien $f(0)$, altså **antall settefisk som ble satt ut** (ved $x = 0$ døgn).
- 0,996 er vekstfaktoren per døgn. Siden $0{,}996 = 1 - 0{,}004$, **avtar antallet settefisk med** 0,4 % **per døgn**.

c) $f'(100)$. Stigningstallet til tangenten i et punkt er den momentane vekstfarten. Tegner vi tangenten til grafen i $x = 100$ og leser av stigningstallet (eller regner det ut med graftegner), får vi

$$f'(100) \approx -95.$$

Det betyr at **antall settefisk avtar med omtrent** 95 **fisk per døgn** når det har gått 100 døgn etter utsettingen.

d) Gjennomsnittlig vekstfart første året. Ett år er 365 døgn. Gjennomsnittlig vekstfart er den gjennomsnittlige endringen per døgn:

$$\frac{f(365) - f(0)}{365 - 0}.$$

Med $f(365) = 35\,400 \cdot 0{,}996^{365} \approx 8\,197$ blir

$$\frac{8\,197 - 35\,400}{365} = \frac{-27\,203}{365} \approx \boxed{-74{,}5 \text{ fisk per døgn}}.$$

I gjennomsnitt forsvant det altså rundt 75 settefisk per døgn det første året.

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. Tabell over kg sjokolade per person i Norge: 1970: 4,6, 1980: 6,2, 1990: 7,6, 2000: 8,2, 2010: 9,5. a) La x være antall år etter 1970 og finn en lineær regresjonsmodell S. b) Tolk stigningstallet. c) Hvor mange gram per person i 2020 ifølge S?

a) Lineær regresjon. Med $x = 0, 10, 20, 30, 40$ og tilhørende y-verdier gir lineær regresjon (i GeoGebra/CAS) modellen

$$\boxed{S(x) = 0{,}118x + 4{,}86}.$$

b) Stigningstallet. Stigningstallet 0,118 forteller at sjokoladeforbruket ifølge modellen **øker med** 0,118 **kg per person per år** (altså om lag 118 gram per person hvert år).

c) Prognose for 2020. År 2020 svarer til $x = 50$:

$$S(50) = 0{,}118 \cdot 50 + 4{,}86 = 5{,}9 + 4{,}86 = 10{,}76 \text{ kg}.$$

Omgjort til gram:

$$10{,}76 \text{ kg} = \boxed{10\,760 \text{ gram per person}}.$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2$. Linjen l skjærer grafen i $P(p, f(p))$ og $Q(q, f(q))$. a) Vis at l har stigningstall $p + q$. b) Bruk CAS til å finne skjæringspunktene mellom l og koordinataksene.

a) Stigningstallet til linjen gjennom $P(p, p^2)$ og $Q(q, q^2)$ er

$$a = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = \frac{(q - p)(q + p)}{q - p} = \boxed{p + q}, \qquad p \neq q. \quad \blacksquare$$

b) Med CAS. Linja har stigningstall $p + q$ og går gjennom $P(p, p^2)$. Likningen blir

$$y - p^2 = (p + q)(x - p) \implies y = (p + q)x - pq.$$

(I CAS: definer `l(x) := (p+q)*x - p*q` etter å ha satt opp linja gjennom de to punktene.)

- **Skjæring med y-aksen** ($x = 0$): $y = (p + q) \cdot 0 - pq = -pq$. Punktet er $\boxed{(0, -pq)}$.
- **Skjæring med x-aksen** ($y = 0$): $(p + q)x = pq \Rightarrow x = \dfrac{pq}{p + q}$. Punktet er $\boxed{\left(\dfrac{pq}{p + q},\ 0\right)}$ (for $p + q \neq 0$).

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Idrettsklubb med 250 medlemmer og tre aktiviteter. Totaltall: Fotball 200, Håndball 90, Basketball 40. Venndiagrammet oppgir 35 (fotball ∩ håndball, ikke basket), 30 (kun håndball) og 10 (alle tre). a) Fyll inn tallene som mangler. b) P(alle tre). c) P(fotball | håndball).

a) Utfylling av venndiagrammet. Kall de syv områdene slik (alle uten å regne med overlappende deler dobbelt):

Vi kjenner: kun håndball = 30, fotball ∩ håndball (ikke basket) = 35, alle tre = 10.

Håndball ∩ basketball (ikke fotball): Siden 90 medlemmer spiller håndball,

$$\text{H} \cap \text{B (kun)} = 90 - 30 - 35 - 10 = 15.$$

Kun fotball og fotball ∩ basketball: La fotball ∩ basketball (ikke håndball) være z. Da er - kun fotball $= 200 - 35 - 10 - z = 155 - z$, - kun basketball $= 40 - 15 - 10 - z = 15 - z$.

Totalen er 250:

$$(155 - z) + 30 + (15 - z) + 35 + 15 + z + 10 = 250 \implies 260 - z = 250 \implies z = 10.$$

Da blir kun fotball = 145 og kun basketball = 5. Oppsummert:

Område	Antall
Kun fotball	145
Kun håndball	30
Kun basketball	5
Fotball ∩ håndball (ikke basket)	35
Håndball ∩ basketball (ikke fotball)	15
Fotball ∩ basketball (ikke håndball)	10
Alle tre	10

Kontroll: $145 + 30 + 5 + 35 + 15 + 10 + 10 = 250$. ✓

b) P(alle tre). 10 av 250 medlemmer spiller alle tre:

$$P(\text{alle tre}) = \frac{10}{250} = \boxed{\frac{1}{25} = 0{,}04}.$$

c) P(fotball | håndball). Av de 90 håndballspillerne spiller $35 + 10 = 45$ også fotball:

$$P(\text{fotball} \mid \text{håndball}) = \frac{45}{90} = \boxed{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Oppgave. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x$. Bruk CAS til å vise at grafen har et terrassepunkt, og bestem koordinatene uttrykt ved a.

Løsning. Et terrassepunkt er et stasjonært punkt der $f'(x) = 0$ men hvor den deriverte ikke skifter fortegn (også $f''(x) = 0$). Vi deriverer (gjerne med CAS-kommandoene `f'(x)` og `f''(x)`):

$$f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

$f'(x) = 0$ gir $(x - a)^2 = 0$, altså den **doble** løsningen $x = a$. Siden $(x - a)^2 \geq 0$ for alle x, er $f'(x) \geq 0$ overalt — den deriverte skifter ikke fortegn i $x = a$. Funksjonen er altså voksende på begge sider, og $x = a$ er et terrassepunkt.

Vi bekrefter med den andrederiverte: $f''(x) = 2x - 2a$, og $f''(a) = 0$.

y-verdien i punktet:

$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - a \cdot a^2 + a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3 = \frac{1}{3}a^3.$$

$$\boxed{\text{Terrassepunkt i } \left(a,\ \tfrac{1}{3}a^3\right)}$$

Oppgave 6 (4 poeng)

Oppgave. Firkanten $ABCD$. Den stiplede diagonalen $DB = a$. I trekant BCD er $\angle C = 90^\circ$ og $\angle CDB = 30^\circ$. I trekant ABD er $\angle BDA = 105^\circ$ og $\angle DBA = 30^\circ$. a) Vis at $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. b) Vis at arealet av $ABCD$ er $\frac{1}{8}a^2(2\sqrt{3}+1)$.

a) Finn CD. I den rettvinklede trekanten BCD er $\angle C = 90^\circ$, så $DB = a$ er hypotenusen. CD er hosliggende katet til vinkelen $\angle CDB = 30^\circ$:

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{DB} \implies CD = a\cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}a}. \quad \blacksquare$$

b) Areal av $ABCD$. Diagonalen DB deler firkanten i to trekanter, BCD og ABD.

Trekant BCD: Den andre kateten er $CB = a\sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. Arealet er

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

Trekant ABD: Her er $\angle ADB = 105^\circ$ og $\angle ABD = 30^\circ$, så $\angle A = 180^\circ - 105^\circ - 30^\circ = 45^\circ$. Med sinussetningen finner vi sidene fra den kjente siden $DB = a$ (som ligger motstående vinkel A):

$$\frac{AD}{\sin(\angle ABD)} = \frac{DB}{\sin A} \implies AD = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}.$$

Arealet av ABD kan vi finne med $A = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot AD \cdot \sin(\angle ADB)$:

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 105^\circ = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ}.$$

Med eksakte verdier $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$:

$$A_{ABD} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{8}.$$

(Her er $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.) Totalt areal blir

$$A = A_{BCD} + A_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 + \frac{(\sqrt{3}+1)}{8}a^2 = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+1\right) = \boxed{\frac{1}{8}a^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}. \quad \blacksquare$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.