

# Matematikk 1T — Høst 2017

## Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

**Om dette løsningsforslaget.** Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

### DEL 1 — Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1 (2 poeng)

**Oppgave.** Regn ut  $\frac{120 \cdot 25000}{0,15}$  og skriv svaret på standardform.

**Løsning.** Vi regner ut teller og deler:

$$\frac{120 \cdot 25\,000}{0,15} = \frac{3\,000\,000}{0,15} = 20\,000\,000.$$

Skrevet på standardform (ett siffer foran komma, ganget med en tierpotens):

$$\boxed{2 \cdot 10^7}$$

#### Oppgave 2 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs likningen  $\frac{1}{2}x - 1 = 9 - 2x$  grafisk.

**Løsning.** Vi tegner de to rette linjene

$$y_1 = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{og} \quad y_2 = 9 - 2x$$

i samme koordinatsystem. Linjen  $y_1$  har stigningstall  $\frac{1}{2}$  og skjærer  $y$ -aksen i  $-1$ ; linjen  $y_2$  har stigningstall  $-2$  og skjærer  $y$ -aksen i  $9$ . Skjæringspunktet leses av til  $x = 4$  (med  $y = 1$ ).

Kontroll ved innsetting:  $\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$  og  $9 - 2 \cdot 4 = 1$ . ✓

$$\boxed{x = 4}$$

### Oppgave 3 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs ulikheten  $x^2 - x - 12 \leq 0$ .

**Løsning.** Vi finner nullpunktene til  $x^2 - x - 12$ :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \implies x = -3 \text{ eller } x = 4.$$

Altså er  $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ . Parabelen åpner oppover, så uttrykket er negativt (eller null) mellom nullpunktene:

$$\boxed{-3 \leq x \leq 4}$$

### Oppgave 4 (2 poeng)

**Oppgave.** Sorter tallene  $\sin 73^\circ$ ,  $\tan 45^\circ$ ,  $\lg 1$  og  $\lg(10^{-\frac{1}{4}})$  i stigende rekkefølge, med begrunnelse.

**Løsning.** Vi finner verdien til hvert tall:

- $\tan 45^\circ = 1$
- $\sin 73^\circ$ : en sinusverdi nær  $90^\circ$ , altså litt mindre enn 1. ( $\sin 73^\circ \approx 0,96$ .)
- $\lg 1 = 0$  (fordi  $10^0 = 1$ ).
- $\lg(10^{-\frac{1}{4}}) = -\frac{1}{4}$  (logaritmeregelen  $\lg 10^a = a$ ).

Stigende rekkefølge ( $-\frac{1}{4} < 0 < 0,96 < 1$ ):

$$\boxed{\lg(10^{-\frac{1}{4}}) < \lg 1 < \sin 73^\circ < \tan 45^\circ}$$

### Oppgave 5 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs likningen  $\lg(x + \frac{1}{25}) = -2$ .

**Løsning.** Definisjonen av tierlogaritmen gir  $x + \frac{1}{25} = 10^{-2}$ :

$$x + \frac{1}{25} = \frac{1}{100} \implies x = \frac{1}{100} - \frac{1}{25} = \frac{1}{100} - \frac{4}{100} = -\frac{3}{100}.$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{100} = -0,03}$$

(Kontroll:  $x + \frac{1}{25} = -0,03 + 0,04 = 0,01 = 10^{-2} > 0$ , så argumentet er positivt. ✓)

### Oppgave 6 (1 poeng)

**Oppgave.** Skriv  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$  så enkelt som mulig.

**Løsning.** Teller:  $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$ . Nevner:  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^3 = x\sqrt{x}$ . Da blir

$$\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{x}.$$

$$\boxed{\frac{3}{x}}$$

### Oppgave 7 (2 poeng)

**Oppgave.** Skriv  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{30}} \cdot 5^{-1} \cdot 10^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$  så enkelt som mulig.

**Løsning.** Vi tar leddene hver for seg. Først bråken:

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{75}{30}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Med  $5^{-1} = \frac{1}{5}$  og  $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ :

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{50}{2}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{25} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1.$$

Det siste leddet er  $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ . Til sammen:

$$1 + 2 = 3.$$

$$\boxed{3}$$

### Oppgave 8 (2 poeng)

**Oppgave.** En lineær funksjon  $f$  oppfyller  $f(2) = 4$  og  $f'(2) = 3$ . Bestem  $f(x)$ .

**Løsning.** En lineær funksjon har formen  $f(x) = ax + b$ , der den deriverte (stigningstallet) er konstant:  $f'(x) = a$ . Dermed er

$$a = f'(2) = 3.$$

Vi bruker  $f(2) = 4$  til å finne  $b$ :

$$f(2) = 3 \cdot 2 + b = 6 + b = 4 \implies b = -2.$$

$$\boxed{f(x) = 3x - 2}$$

### Oppgave 9 (3 poeng)

**Oppgave.** a) Faktoriser  $3x^2 - 9x$ . b) Skriv  $\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{x-3} - \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$  så enkelt som mulig.

a) Felles faktor  $3x$ :

$$3x^2 - 9x = \boxed{3x(x-3)}.$$

b) Først faktoriserer vi nevneren i siste brøk:  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ . Fellesnevner er  $(x-2)(x-3)$ :

$$\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{2x(x-2)}{(x-2)(x-3)} - \frac{2x}{(x-2)(x-3)}.$$

Vi samler tellerne:

$$x(x-3) + 2x(x-2) - 2x = x^2 - 3x + 2x^2 - 4x - 2x = 3x^2 - 9x = 3x(x-3).$$

Setter inn over fellesnevneren og forkorter med  $(x-3)$ :

$$\frac{3x(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3x}{x-2}.$$

$$\boxed{\frac{3x}{x-2}}$$

### Oppgave 10 (3 poeng)

**Oppgave.** To like store Vg2-klasser, 2A og 2B. Alle i 2A har valgt biologi; halvparten av 2B har valgt biologi. a) Sannsynlighet for at en tilfeldig elev har valgt biologi. b) Gitt at en tilfeldig valgt biologi-elev — sannsynlighet for at hen går i 2A.

**Oppsett.** La hver klasse ha  $n$  elever (til sammen  $2n$ ). 2A: alle  $n$  har biologi. 2B:  $\frac{n}{2}$  har biologi. Antall biologi-elever totalt:  $n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ .

a) Sannsynligheten for biologi:

$$P(\text{biologi}) = \frac{\frac{3n}{2}}{2n} = \frac{3n}{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{P(\text{biologi}) = \frac{3}{4}}$$

b) Betinget sannsynlighet — av biologi-elevene, hvor stor andel går i 2A:

$$P(2A | \text{biologi}) = \frac{P(2A \cap \text{biologi})}{P(\text{biologi})} = \frac{n}{\frac{3n}{2}} = \frac{n \cdot 2}{3n} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{P(2A | \text{biologi}) = \frac{2}{3}}$$

### Oppgave 11 (4 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ . a) Bestem gjennomsnittlig vekstfart i  $[-1, 1]$ . b) Vis at  $(0, 2)$  er et terrassepunkt.

a) Gjennomsnittlig vekstfart er  $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$ . Vi regner ut:

$$f(1) = 1 - 2 + 2 = 1, \quad f(-1) = 1 + 2 + 2 = 5.$$

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

$$\boxed{\text{Gjennomsnittlig vekstfart} = -2}$$

b) Et terrassepunkt er et punkt der både  $f'(x) = 0$  og  $f''(x) = 0$  (og den deriverte ikke skifter fortegn). Vi deriverer:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \quad f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

I  $x = 0$ :

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0.$$

Dessuten er  $f'(x) = 2x^2(2x - 3) \leq 0$  for alle  $x$  nær 0 (siden  $2x^2 \geq 0$  og  $2x - 3 < 0$ ), så  $f$  er avtakende på begge sider av  $x = 0$  — den deriverte skifter ikke fortegn. Funksjonsverdien er  $f(0) = 2$ . Dermed er  $(0, 2)$  et terrassepunkt. ■

### Oppgave 12 (5 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ . a) Bestem  $f'(x)$ . b) Finn likningen for tangenten i  $(1, f(1))$ . c) Har grafen flere tangenter parallelle med denne? Begrunn.

a) Deriverer ledd for ledd:

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2}$$

b) Vi trenger  $f(1)$  og  $f'(1)$ :

$$f(1) = 1 - 6 + 12 - 8 = -1, \quad f'(1) = 3(1 - 2)^2 = 3.$$

Tangenten har stigningstall 3 og går gjennom  $(1, -1)$ :

$$y - (-1) = 3(x - 1) \implies y = 3x - 4.$$

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

c) En parallell tangent har samme stigningstall 3, altså  $f'(x) = 3$ :

$$3(x-2)^2 = 3 \implies (x-2)^2 = 1 \implies x-2 = \pm 1 \implies x = 1 \text{ eller } x = 3.$$

$x = 1$  er tangenten fra b). Det finnes altså **én** annen tangent med samme stigningstall, nemlig i  $x = 3$ . (Der er  $f(3) = 27 - 54 + 36 - 8 = 1$ , så tangenten er  $y = 3x - 8$ .)

Ja — det finnes nøyaktig én annen parallell tangent, i  $x = 3$ .

### Oppgave 13 (3 poeng)

**Oppgave.** Trekantene  $ABC$  og  $DEF$  har  $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ,  $\tan A = \tan D = \frac{5}{12}$  og  $AC = 2DF$ . Lag en skisse med mål.

**Løsning.** Begge trekanter er rettvinklet og har samme spisse vinkel ( $\tan A = \tan D$ ), så de er **formlike**. I trekant  $DEF$  er  $\tan D = \frac{EF}{DE} = \frac{5}{12}$ . Den enkleste «pytagoreiske» trekanten med dette forholdet er 5–12–13:

$$DE = 12, \quad EF = 5, \quad DF = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Da er  $AC = 2DF = 26$ , og siden  $ABC$  er formlik med målestokk 2:

$$AB = 24, \quad BC = 10, \quad AC = 26.$$

Kontroll:  $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \checkmark$  og  $\sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26 \checkmark$ .

**Skisse (mål påført):**

- Trekant  $DEF$ : rett vinkel i  $E$ , kateter  $DE = 12$  og  $EF = 5$ , hypotenus  $DF = 13$ .
- Trekant  $ABC$ : rett vinkel i  $B$ , kateter  $AB = 24$  og  $BC = 10$ , hypotenus  $AC = 26$ .

$$ABC : 10, 24, 26 \quad DEF : 5, 12, 13$$

### Oppgave 14 (3 poeng)

**Oppgave.** En blå figur er tegnet på et rutenett med kvadrater med side  $a$  (se figuren i oppgaven — to runde «kuler» øverst med en halvsirkel skåret ut nederst i midten). a) Bestem omkretsen uttrykt ved  $a$ . b) Bestem arealet uttrykt ved  $a$ .

**Tolkning av figuren.** Alle buene i figuren er sirkelbuer med radius  $a$  (de følger rutene). Figuren kan deles opp i kvartsirkler med radius  $a$  pluss et rektangulært midtparti, med en halvsirkel (radius  $a$ ) skåret ut nederst i midten.

a) **Omkrets.** Randen består til sammen av buer som tilsvarer omkretsen til **to hele sirkler** med radius  $a$ . Omkretsen til én sirkel med radius  $a$  er  $2\pi a$ , så

$$O = 2 \cdot 2\pi a = 4\pi a.$$

$$O = 4\pi a$$

**b) Areal.** Figuren settes sammen av **seks kvartsirkl**er med radius  $a$  og et rektangel på  $2a \times a$  (areal  $2a^2$ ), og en **halvsirkel** med radius  $a$  er skåret bort:

$$A = \underbrace{6 \cdot \frac{1}{4}\pi a^2}_{\text{seks kvartsirkl}} + \underbrace{2a^2}_{\text{rektangel}} - \underbrace{\frac{1}{2}\pi a^2}_{\text{utskåret halvsirkel}} = \frac{3}{2}\pi a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2 + 2a^2.$$

$$A = a^2(\pi + 2)$$

## DEL 2 — Med hjelpemidler

### Oppgave 1 (8 poeng)

**Oppgave.** Antall tusen artikler i den engelske Wikipedia  $x$  år etter 1.1.2002 er  $f(x) = -2,34x^3 + 50x^2 + 129x + 19,7$  for  $x \in [0, 15]$ . a) Tegn grafen. b) Gjennomsnittlig vekstfart i  $[0, 15]$ . c) Bestem  $f'(x)$  og tegn den. d) Toppunktet til  $f'$  og hva det betyr.

a) Med graftegner (GeoGebra/CAS) tegnes  $y = -2,34x^3 + 50x^2 + 129x + 19,7$  for  $0 \leq x \leq 15$ . Grafen starter i  $f(0) = 19,7$  (ca. 19 700 artikler ved starten av 2002) og stiger jevnt — først stadig brattere, deretter avtar bratthet — til  $f(15) \approx 5307$  (ca. 5,3 millioner artikler ved starten av 2017).

b) Gjennomsnittlig vekstfart i  $[0, 15]$ :

$$\frac{f(15) - f(0)}{15 - 0} = \frac{5307,2 - 19,7}{15} = \frac{5287,5}{15} = 352,5.$$

I gjennomsnitt vokste antallet med ca. 352,5 tusen ( $\approx 352\,500$ ) artikler per år i perioden.

$$\text{Gjennomsnittlig vekstfart} = 352,5 \text{ (tusener artikler per år)}$$

c) Vi deriverer:

$$f'(x) = -7,02x^2 + 100x + 129$$

Grafen til  $f'$  for  $x \in \langle 0, 15 \rangle$  er en parabel som vender ned (toppunkt), med  $f'(0) = 129$ .

d) Toppunktet til  $f'$  er der  $f''(x) = 0$ :

$$f''(x) = -14,04x + 100 = 0 \implies x = \frac{100}{14,04} \approx 7,12.$$

Verdien der:

$$f'(7,12) \approx -7,02 \cdot 7,12^2 + 100 \cdot 7,12 + 129 \approx 485.$$

$$\boxed{\text{Toppunkt på } f' : (7,12, 485)}$$

**Praktisk betydning.** Grafen til  $f$  viser at antall artikler hele tiden øker i perioden. Grafen til  $f'$  (den momentane vekstfarten) har toppunkt i ca.  $x = 7,12$ . Det betyr at antall artikler **vokste raskest** rundt  $x \approx 7,1$  år etter 1.1.2002, altså omkring **tidlig 2009**, og at den største vekstfarten da var ca. 485 tusen ( $\approx 485\,000$ ) artikler per år. Etter dette tidspunktet vokste antallet fortsatt, men stadig saktere.

## Oppgave 2 (4 poeng)

**Oppgave.** En eske har 3 hvite og 9 røde julekuler (12 til sammen). 1 hvit og 4 røde er ødelagt (5 ødelagte, 7 hele). Du trekker to kuler tilfeldig (uten tilbakelegging). a) Sannsynlighet for at begge er hele. b) Sannsynlighet for at minst én er ødelagt.

**Oppsett.** Av 12 kuler er 7 hele og 5 ødelagte.

a) Sannsynligheten for to hele kuler:

$$P(\text{begge hele}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22} \approx 0,318.$$

$$\boxed{P(\text{begge hele}) = \frac{7}{22} \approx 31,8\%}$$

b) «Minst én ødelagt» er det motsatte av «begge hele»:

$$P(\text{minst én ødelagt}) = 1 - \frac{7}{22} = \frac{15}{22} \approx 0,682.$$

$$\boxed{P(\text{minst én ødelagt}) = \frac{15}{22} \approx 68,2\%}$$

## Oppgave 3 (3 poeng)

**Oppgave.** Magnus og Monika står på en horisontal slette. Fra figuren: avstanden mellom dem er 140 m, og fra Monika (nærmest fjellet) er det  $100 \text{ m} + x$  til foten av fjellet. De måler høydevinklene  $36^\circ$  og  $50^\circ$  til toppen. Bestem fjellets høyde  $h$ .

**Løsning.** La  $d$  være den vannrette avstanden fra Monika ( $50^\circ$ ) til loddrett under toppen. Da er avstanden fra Magnus ( $36^\circ$ ) lik  $d + 140$ . Med høydedefinisjonen av tangens:

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{d}, \quad \tan 36^\circ = \frac{h}{d + 140}.$$

Løser vi den første for  $d = \frac{h}{\tan 50^\circ}$  og setter inn i den andre:

$$\tan 36^\circ = \frac{h}{\frac{h}{\tan 50^\circ} + 140}$$

Dette gir likningen

$$h = \tan 36^\circ \left( \frac{h}{\tan 50^\circ} + 140 \right) \implies h \left( 1 - \frac{\tan 36^\circ}{\tan 50^\circ} \right) = 140 \tan 36^\circ.$$

Med  $\tan 36^\circ \approx 0,7265$  og  $\tan 50^\circ \approx 1,1918$ :

$$h = \frac{140 \cdot 0,7265}{1 - \frac{0,7265}{1,1918}} = \frac{101,71}{0,3904} \approx 260,6 \text{ m.}$$

$$\boxed{h \approx 260,6 \text{ m}}$$

(Samme svar fås ved å regne i den lille trekanten mellom de to siktelinjene: den har grunnlinje 140 m, vinkler  $36^\circ$  og  $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ , og toppvinkel  $14^\circ$ . Sinussetningen gir skråsiden  $BT = \frac{140 \sin 36^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 340,1 \text{ m}$ , og deretter  $h = BT \cdot \sin 50^\circ \approx 260,6 \text{ m}$ .)

#### Oppgave 4 (4 poeng)

**Oppgave.** Firkanten  $ABCD$  med  $AB = 8$ ,  $BC = 12$ ,  $CD = 8\sqrt{3}$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$  (i  $A$ ) og  $\angle BCD = 30^\circ$  (i  $C$ ). a) Bestem omkretsen eksakt. b) Bestem arealet eksakt.

**Strategi.** Vi trekker diagonalen  $BD$  og deler firkanten i trekant  $BCD$  (kjente  $BC = 12$ ,  $CD = 8\sqrt{3}$ , mellomliggende vinkel  $30^\circ$ ) og trekant  $ABD$  (kjent  $AB = 8$ , vinkel  $60^\circ$  i  $A$ ).

**Finn**  $BD$  med cosinussetningen i trekant  $BCD$ :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos 30^\circ = 144 + 192 - 2 \cdot 12 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Her er  $2 \cdot 12 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot 8 \cdot 3 = 288$ , så

$$BD^2 = 336 - 288 = 48 \implies BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

**Finn**  $AD$  med cosinussetningen i trekant  $ABD$  ( $\angle A = 60^\circ$  mellom  $AB$  og  $AD$ ):

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \implies 48 = 64 + AD^2 - 2 \cdot 8 \cdot AD \cdot \frac{1}{2}.$$

$$AD^2 - 8AD + 16 = 0 \implies (AD - 4)^2 = 0 \implies AD = 4.$$

a) **Omkrets:**

$$O = AB + BC + CD + DA = 8 + 12 + 8\sqrt{3} + 4 = 24 + 8\sqrt{3}.$$

$$O = 24 + 8\sqrt{3} \approx 37,86$$

b) **Areal** (sum av de to trekantene, hver med formelen  $\frac{1}{2}ab \sin C$ ):

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3},$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 24\sqrt{3}.$$

$$A = 8\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 32\sqrt{3}.$$

$$A = 32\sqrt{3} \approx 55,43$$

### Oppgave 5 (5 poeng)

**Oppgave.** a)  $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ : forklar at grafen har et bunnpunkt og bestem det. b)  $g(x) = ax^2 + bx + c$  med  $a > 0$ : bruk CAS til å vise at bunnpunktet er  $(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a})$ . c) To tangenter til  $g$  i  $S(s, g(s))$  og  $T(t, g(t))$  skjærer hverandre i  $P$ ; bruk CAS til å vise at  $x$ -koordinaten til  $P$  ligger midt mellom  $s$  og  $t$ .

a) Førstekoeffisienten er  $2 > 0$ , så parabellen vender oppover og har derfor et **bunnpunkt** (minimumspunkt). Bunnpunktet er der  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 4x - 7 = 0 \implies x = \frac{7}{4}.$$

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = 2 \cdot \frac{49}{16} - 7 \cdot \frac{7}{4} + 3 = \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 3 = \frac{49 - 98 + 24}{8} = -\frac{25}{8}.$$

$$\text{Bunnpunkt } \left(\frac{7}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$

b) **CAS.** I et CAS-verktøy (f.eks. GeoGebra CAS) deriverer vi  $g$  og løser  $g'(x) = 0$ :

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\text{Løs}(g'(x) = 0, x) \quad \rightarrow \quad x = -b/(2a)$$

$$g(-b/(2a)) \quad \rightarrow \quad (4ac - b^2)/(4a)$$

Vi får  $x$ -koordinaten  $-\frac{b}{2a}$ , og innsatt i  $g$ :

$$g\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Siden  $a > 0$  er dette et minimum, altså bunnpunktet:

$$\left( -\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$$

c) **CAS.** Tangenten til  $g$  i et punkt  $(p, g(p))$  er  $y = g(p) + g'(p)(x - p)$ , med  $g'(x) = 2ax + b$ . Vi setter de to tangentlikningene (i  $s$  og  $t$ ) lik hverandre og løser for  $x$ :

$$g(x) := a*x^2 + b*x + c$$

$$tS(x) := g(s) + g'(s)*(x - s)$$

$$tT(x) := g(t) + g'(t)*(x - t)$$

$$\text{Løs}(tS(x) = tT(x), x) \quad \rightarrow \quad x = (s + t)/2$$

For hånd: likningen  $g(s) + (2as + b)(x - s) = g(t) + (2at + b)(x - t)$  forenkles. Etter litt regning (leddene med  $x$  samles) får vi

$$2a(s - t)x = a(s^2 - t^2) + \dots \implies x = \frac{s + t}{2}.$$

Altså ligger  $x$ -koordinaten til skjæringspunktet  $P$  nøyaktig midt mellom  $s$  og  $t$ . ■

$$x_P = \frac{s + t}{2}$$

---

*Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: [matematikk.net](http://matematikk.net). Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.*