

Matematikk 1T — Høst 2018

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant er gitt med kateten 6 (hosliggende til v), kateten 8 (motstående til v) og rett vinkel mellom dem. Bestem $\sin v$.

Løsning. Vinkelen v ligger ved hjørnet der katetene 6 og 8 møtes via hypotenusen. Den motstående kateten til v er 8, den hosliggende er 6. Hypotenusen finnes med Pytagoras:

$$\text{hyp} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Da er

$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{4x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

Løsning. Faktoriser teller og nevner hver for seg:

$$4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) = 4(x - 1)(x + 1), \quad x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Dermed

$$\frac{4(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{4(x + 1)}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

$$\boxed{\frac{4(x + 1)}{x - 1}}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 - 4x - 12 < 0$.

Løsning. Nullpunktene til $x^2 - 4x - 12$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2},$$

altså $x = -2$ og $x = 6$. Da er $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er negativt *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-2 < x < 6}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ a) grafisk og b) ved regning.

a) **Grafisk.** Tegn parabelen $y = -x^2 + 4$ (toppunkt $(0, 4)$, nullpunkter $x = \pm 2$, åpner nedover) og den rette linjen $y = x + 2$ (skjærer y -aksen i 2, stigningstall 1) i samme koordinatsystem. Linjen skjærer parabelen i to punkter, og koordinatene til skjæringspunktene leses av til $(-2, 0)$ og $(1, 3)$ — i samsvar med b).

b) **Ved regning.** Sett uttrykkene for y lik hverandre:

$$-x^2 + 4 = x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0,$$

så $x = -2$ eller $x = 1$. Tilhørende y -verdier fra $y = x + 2$:

- $x = -2 \implies y = 0$
- $x = 1 \implies y = 3$

$$\boxed{(-2, 0) \text{ og } (1, 3)}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut $\sqrt{12} - \sqrt[6]{3^3} - \sqrt[4]{9}$.

Løsning. Skriv hvert ledd som en potens av 3:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}, \\ \sqrt[6]{3^3} &= 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}, \\ \sqrt[4]{9} &= \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Dermed

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{0}.$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $2^x \cdot 2^{x/2} = \frac{1}{8}$.

Løsning. Bruk potensregelen $2^x \cdot 2^{x/2} = 2^{x+x/2} = 2^{3x/2}$, og skriv $\frac{1}{8} = 2^{-3}$:

$$2^{3x/2} = 2^{-3} \implies \frac{3x}{2} = -3 \implies 3x = -6 \implies x = -2.$$

$$\boxed{x = -2}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Sirkel S_1 har omkrets 5π . Sirkel S_2 har et areal som er fire ganger så stort som arealet av S_1 . Bestem radien i S_2 .

Løsning. Omkretsen av S_1 er $2\pi r_1 = 5\pi$, så

$$r_1 = \frac{5\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}.$$

Arealet av S_1 er $A_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$. Arealet av S_2 er $A_2 = 4A_1 = 25\pi$. Da er $\pi r_2^2 = 25\pi$, altså $r_2^2 = 25$, og

$$\boxed{r_2 = 5}$$

Snarvei: fire ganger arealet betyr dobbelt så stor radius, så $r_2 = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$.

Oppgave 8 (4 poeng)

Oppgave. Grafen til en funksjon f går gjennom $(-2, -6)$, $(0, 0)$ og $(1, \frac{3}{4})$, og $f'(x) = (x-1)(x-1)(x+2)$. a) Bestem $f'(0)$. b) Bestem likningen for tangenten i $(0, 0)$. c) Vis ved regning at $(-2, -6)$ er et bunnpunkt og $(1, \frac{3}{4})$ er et terrassepunkt.

a) Sett $x = 0$ inn i f' :

$$f'(0) = (0-1)(0-1)(0+2) = (-1)(-1)(2) = \boxed{2}.$$

b) Tangenten i $(0, 0)$ har stigningstall $f'(0) = 2$ og går gjennom $(0, 0)$:

$$y = 2(x-0) + 0 \implies \boxed{y = 2x}.$$

c) Vi finner nullpunktene til f' og undersøker fortegnsskiftet. $f'(x) = (x-1)^2(x+2) = 0$ gir $x = -2$ og $x = 1$ (dobbelt rot).

Faktoren $(x-1)^2 \geq 0$ for alle x , så fortegnet til f' bestemmes av $(x+2)$:

Intervall	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$(x-1)^2$	+	+	+
$(x+2)$	-	+	+
$f'(x)$	-	+	+
f	synker	vokser	vokser

- I $x = -2$ skifter f' fra **negativ til positiv**: f går fra å synke til å vokse, så $(-2, -6)$ er et **bunnpunkt**.
- I $x = 1$ er $f'(1) = 0$, men f' er positiv på *begge* sider (skifter ikke fortegn). f vokser før og etter, så $(1, \frac{3}{4})$ er et **terrassepunkt** (vendetangent).

$$\boxed{(-2, -6) \text{ bunnpunkt, } (1, \frac{3}{4}) \text{ terrassepunkt}}$$

Oppgave 9 (4 poeng)

Oppgave. To terninger kastes én gang. a) Bestem sannsynligheten for nøyaktig én toer. b) Gitt at summen av antall øyne er åtte: bestem sannsynligheten for at ingen av terningene viser en toer.

a) Det er $6 \cdot 6 = 36$ like sannsynlige utfall. "Nøyaktig én toer" betyr at den ene terningen viser 2 og den andre noe annet:

- første viser 2, andre viser ikke 2: $1 \cdot 5 = 5$ utfall
- første viser ikke 2, andre viser 2: $5 \cdot 1 = 5$ utfall

Til sammen 10 gunstige utfall:

$$P(\text{nøyaktig én toer}) = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18}}.$$

b) Utfallene med sum 8 er

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2),$$

altså 5 stykker. Av disse inneholder $(2, 6)$ og $(6, 2)$ en toer; de tre andre gjør det ikke. Betinget sannsynlighet:

$$P(\text{ingen toer} \mid \text{sum} = 8) = \frac{3}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Oppgave 10 (6 poeng)

Oppgave. I trekant ABC er $\angle A = 30^\circ$ og $AC = 10$. a) Hva er den minste lengden BC kan ha? Lag en skisse. La nå $BC = 8$. b) Bruk sinussetningen til å bestemme $\sin B$. c) Sinussetningen gir to løsninger; den ene er $\angle B = 38,7^\circ$. Bestem den andre, og skisser hvordan trekanten kan se ut.

a) Siden BC ligger motstående $\angle A$, blir BC kortest når C "felles loddrett" ned på linjen gjennom A og B — altså når BC er høyden fra C ned på AB . Da er trekanten rettvinklet i B , og

$$BC_{\min} = AC \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{5}.$$

Skisse: en rettvinklet trekant med rett vinkel i B , hypotenus $AC = 10$, $\angle A = 30^\circ$ og motstående katet $BC = 5$.

b) Sinussetningen med sidene $BC = 8$ (motstående A) og $AC = 10$ (motstående B):

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \implies \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{8} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}.$$

c) Likningen $\sin B = 0,625$ har to løsninger i $(0^\circ, 180^\circ)$ fordi $\sin(180^\circ - v) = \sin v$:

$$\angle B = 38,7^\circ \quad \text{eller} \quad \angle B = 180^\circ - 38,7^\circ = \boxed{141,3^\circ}.$$

To mulige trekanter:

- **Spiss løsning** ($\angle B = 38,7^\circ$): da er $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 38,7^\circ = 111,3^\circ$ — en stump, “vid” trekant.
- **Stump løsning** ($\angle B = 141,3^\circ$): da er $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 141,3^\circ = 8,7^\circ$ — en lang, smal trekant der B ligger nærmere A .

Begge har $\angle A = 30^\circ$, $AC = 10$ og $BC = 8$, men B er plassert på to forskjellige steder. (Dette er det klassiske “to-trekant-tilfellet” i sinussetningen.)

Oppgave 11 (6 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant ABC har $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$ (rett vinkel i A). Et rektangel $ADEF$ med sider x og h er innskrevet med D på AB , F på AC og E på hypotenusen BC . a) Forklar at $\triangle DBE$ og $\triangle FEC$ er formlike. b) Vis at $h = -\frac{4}{3}x + 8$. c) Forklar at $x \in \langle 0, 6 \rangle$ og vis at arealet er $g(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$. d) Bestem x slik at arealet blir størst mulig.

a) Begge trekantene er rettvinklede (i D og i F , fordi rektangelets sider står normalt på katetene). Siden $DE \parallel AC$ og $FE \parallel AB$, er $\angle DBE = \angle FEC$ (samsvarende vinkler, EF tverr over de parallelle linjene), og tilsvarende $\angle DEB = \angle FCE$. To par like vinkler gir at $\triangle DBE \sim \triangle FEC$ (formlike etter vv-setningen).

b) Punktet E ligger på hypotenusen. I rektangelet er $AD = x$ og $AF = h$ (siden E har koordinater (x, h) med A i origo, B langs x -aksen og C langs y -aksen). Hypotenusen BC går fra $B = (6, 0)$ til $C = (0, 8)$ og har likningen

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1.$$

Punktet $E = (x, h)$ ligger på linjen, så

$$\frac{x}{6} + \frac{h}{8} = 1 \implies \frac{h}{8} = 1 - \frac{x}{6} \implies h = 8 - \frac{8x}{6} = \boxed{-\frac{4}{3}x + 8}.$$

c) Bredden $x = AD$ må være mer enn 0 (ellers blir det ikke noe rektangel) og mindre enn $AB = 6$ (ellers når D forbi B). Altså $x \in \langle 0, 6 \rangle$. Arealet av rektangelet er

$$g(x) = x \cdot h = x \left(-\frac{4}{3}x + 8\right) = \boxed{-\frac{4}{3}x^2 + 8x}.$$

d) g er en andregradsfunksjon som åpner nedover; maksimum ligger i toppunktet. Toppunktet finnes der $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = -\frac{8}{3}x + 8 = 0 \implies x = \frac{8 \cdot 3}{8} = 3.$$

Da blir $h = -\frac{4}{3} \cdot 3 + 8 = 4$ og arealet $g(3) = 3 \cdot 4 = 12$.

$$\boxed{x = 3 \text{ gir størst areal, } g(3) = 12}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Oppgave. En volleyballbane er 18 m lang, og nettet står midt på (ved $x = 9$ m fra spilleren). Netthøyden er 2,24 m for kvinner og 2,43 m for menn. Ballbanen er $h(x) = -0,07x^2 + 0,67x + 2,04$ for $0 \leq x \leq 12$. a) Tegn grafen. b) Vil ballen gå over nettet? Begrunn.

a) Tegn $h(x) = -0,07x^2 + 0,67x + 2,04$ med graftegner for $x \in [0, 12]$. Grafen er en parabel som åpner nedover; den starter i $h(0) = 2,04$ m (slaghøyden), stiger til et toppunkt og synker igjen. Toppunktet ligger i

$$x = \frac{-0,67}{2 \cdot (-0,07)} \approx 4,79 \text{ m,} \quad h(4,79) \approx 3,64 \text{ m.}$$

b) Nettet står ved $x = 9$ m. Vi regner ut ballhøyden der:

$$h(9) = -0,07 \cdot 9^2 + 0,67 \cdot 9 + 2,04 = -5,67 + 6,03 + 2,04 = 2,40 \text{ m.}$$

Sammenlign med netthøyden:

- **Kvinner** (2,24 m): $2,40 > 2,24$ — ballen går **over** nettet. ✓
- **Menn** (2,43 m): $2,40 < 2,43$ — ballen går **ikke** over nettet. ✗

$$\boxed{h(9) = 2,40 \text{ m : over kvinnenettet, men ikke mennettet.}}$$

Oppgave 2 (8 poeng)

Oppgave. $f(x) = -x^3 + k \cdot x^2$ med $k \geq 1$. a) Bestem nullpunktene. b) Vis med CAS at f har bunnpunkt $(0, 0)$ og toppunkt $(\frac{2}{3}k, \frac{4}{27}k^3)$. c) Bestem tangenten i $(1, f(1))$ med CAS, på formen $y = ax + b$. d) Vis at den momentane vekstfarten i $x = 1$ alltid er større enn den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = 0$ til $x = 2$.

a) Faktoriser: $f(x) = -x^3 + kx^2 = -x^2(x - k)$. Nullpunktene er der $-x^2(x - k) = 0$:

$$x = 0 \text{ (dobbel) og } x = k.$$

b) Den deriverte er $f'(x) = -3x^2 + 2kx = -x(3x - 2k)$, som er null for $x = 0$ og $x = \frac{2k}{3}$.

- $f''(x) = -6x + 2k$. I $x = 0$: $f''(0) = 2k > 0$ (fordi $k \geq 1$) — **bunnpunkt**. $f(0) = 0$, altså $(0, 0)$.
- I $x = \frac{2k}{3}$: $f''(\frac{2k}{3}) = -6 \cdot \frac{2k}{3} + 2k = -4k + 2k = -2k < 0$ — **toppunkt**. Funksjonsverdien er

$$f\left(\frac{2k}{3}\right) = -\left(\frac{2k}{3}\right)^3 + k\left(\frac{2k}{3}\right)^2 = -\frac{8k^3}{27} + \frac{4k^3}{9} = -\frac{8k^3}{27} + \frac{12k^3}{27} = \frac{4k^3}{27}.$$

Altså toppunkt i $(\frac{2}{3}k, \frac{4}{27}k^3)$. ✓

CAS (sympy) bekrefter: $f'(x) = -3x^2 + 2kx$, kritiske punkter $x \in \{0, \frac{2k}{3}\}$, og $f(\frac{2k}{3}) = \frac{4k^3}{27}$.

c) Tangenten i $x = 1$: stigningstall $a = f'(1) = -3 + 2k$, og $f(1) = -1 + k$. Tangentlikningen:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (2k - 3)(x - 1) + (k - 1).$$

Utvidet:

$$y = (2k - 3)x - (2k - 3) + (k - 1) = (2k - 3)x + (-2k + 3 + k - 1) = (2k - 3)x + (2 - k).$$

$$y = (2k - 3)x + (2 - k)$$

d) Momentan vekstfart i $x = 1$ er $f'(1) = 2k - 3$. Gjennomsnittlig vekstfart fra $x = 0$ til $x = 2$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{(-8 + 4k) - 0}{2} = \frac{4k - 8}{2} = 2k - 4.$$

Differansen:

$$f'(1) - \frac{f(2) - f(0)}{2} = (2k - 3) - (2k - 4) = 1 > 0.$$

Differansen er konstant lik 1, uavhengig av k . Den momentane vekstfarten i $x = 1$ er derfor **alltid** 1 større enn den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = 0$ til $x = 2$.

$$f'(1) - \bar{v} = (2k - 3) - (2k - 4) = 1 > 0 \text{ for alle } k$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. Av 450 kunder kjøpte 280 popcorn, 220 smågodt og 30 verken-eller. a) Systematiser i krysstabell/venndiagram. b) Sannsynligheten for at en tilfeldig kunde kjøpte både popcorn og smågodt. c) Gitt at en kunde kjøpte smågodt: sannsynligheten for at kunden ikke kjøpte popcorn.

a) 30 kjøpte verken, så $450 - 30 = 420$ kjøpte minst én av delene. La b være antall som kjøpte **begge**. Da gir inklusjon-eksklusjon:

$$280 + 220 - b = 420 \implies b = 500 - 420 = 80.$$

Krysstabell (antall kunder):

	Smågodt	Ikke smågodt	Sum
Popcorn	80	200	280
Ikke popcorn	140	30	170
Sum	220	230	450

b) 80 av 450 kjøpte begge:

$$P(\text{begge}) = \frac{80}{450} = \boxed{\frac{8}{45}} \approx 0,178.$$

c) Vi vet at kunden kjøpte smågodt (220 kunder). Av disse kjøpte 140 *ikke* popcorn:

$$P(\text{ikke popcorn} \mid \text{smågodt}) = \frac{140}{220} = \boxed{\frac{7}{11}} \approx 0,636.$$

Oppgave 4 (5 poeng)

Oppgave. I trekant ABC er $AC = 2s$, $AB = 5s$ og $\angle A = 60^\circ$. a) Bestem et eksakt uttrykk for arealet uttrykt ved s . b) Bestem et eksakt uttrykk for BC uttrykt ved s . c) Vis at trekanten ikke er rettvinklet for noen verdi av s .

a) Arealet med to sider og mellomliggende vinkel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot 5s \cdot \sin 60^\circ = 5s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2} s^2}.$$

b) Cosinussetningen for siden BC (motstående $\angle A$):

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A = (2s)^2 + (5s)^2 - 2 \cdot 2s \cdot 5s \cdot \cos 60^\circ.$$

Med $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$:

$$BC^2 = 4s^2 + 25s^2 - 20s^2 \cdot \frac{1}{2} = 29s^2 - 10s^2 = 19s^2,$$

så

$$BC = \sqrt{19}s.$$

c) Sidene er $AC = 2s$, $BC = \sqrt{19}s \approx 4,36s$ og $AB = 5s$. Den **lengste** siden er $AB = 5s$, så den største vinkelen er $\angle C$ (motstående AB). En trekant kan bare være rettvinklet hvis den største vinkelen er 90° . Vi tester med cosinussetningen for $\angle C$:

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{4s^2 + 19s^2 - 25s^2}{2 \cdot 2s \cdot \sqrt{19}s} = \frac{-2s^2}{4\sqrt{19}s^2} = -\frac{1}{2\sqrt{19}}.$$

Faktoren s^2 forsvinner, så $\cos C$ er den samme konstanten for **alle** $s > 0$:

$$\cos C = -\frac{1}{2\sqrt{19}} \approx -0,115 \neq 0 \implies \angle C \approx 96,6^\circ.$$

Siden $\cos C \neq 0$, er $\angle C \neq 90^\circ$ (den er faktisk stump). De to andre vinklene er mindre, så ingen av dem er 90° heller. Trekanten er derfor **aldri rettvinklet**, uansett verdi av s .

$$\cos C = -\frac{1}{2\sqrt{19}} \neq 0 \text{ for alle } s \implies \text{ikke rettvinklet.}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Oppgave. Herons formel: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ med $s = \frac{a+b+c}{2}$. En trekant har omkrets 18, areal 12 og to like lange sider. Bruk CAS til å vise at det finnes to ulike slike trekanter, og bestem sidene eksakt.

Løsning. La de to like sidene være $a = b$ og den tredje c . Omkretsen er $2a + c = 18$, så $c = 18 - 2a$, og den halve omkretsen er $s = \frac{18}{2} = 9$. Herons formel gir

$$T = \sqrt{9(9-a)(9-a)(9-c)} = \sqrt{9(9-a)^2(9-c)} = 12.$$

Sett inn $c = 18 - 2a$, slik at $9 - c = 9 - (18 - 2a) = 2a - 9$:

$$9(9-a)^2(2a-9) = 144.$$

CAS (sympy) løser denne tredjegradslikningen i a og gir to gyldige trekanter:

Trekant 1: $a = b = 5$, $c = 18 - 10 = 8$.

Kontroll: $T = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{144} = 12$. ✓ (Dette er den "pene" trekanten 5, 5, 8.)

Trekant 2: $a = b = \frac{35 - \sqrt{33}}{4}$, $c = 18 - 2a = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$.

Kontroll: omkrets $2a + c = 18$, og Herons formel gir nøyaktig $T = 12$ (verifisert med CAS). Numerisk er $a = b \approx 7,31$ og $c \approx 3,37$ — en høy, smal likebeint trekant. Trekantulikheten er oppfylt ($a + a > c$), så dette er en gyldig trekant.

$$\boxed{\{5, 5, 8\} \quad \text{og} \quad \left\{ \frac{35-\sqrt{33}}{4}, \frac{35-\sqrt{33}}{4}, \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right\}}$$

Det finnes altså **to ulike** likebeinte trekantner med omkrets 18 og areal 12.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.