# Matematikk 1T — Høst 2019

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

**Om dette løsningsforslaget.** Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

## DEL 1 — Uten hjelpemidler

### Oppgave 1 (2 poeng)

**Oppgave.** Regn ut $\dfrac{0{,}00046 \cdot 25\,000\,000}{0{,}05}$ og skriv svaret på standardform.

**Løsning.** Vi skriver hvert tall på standardform først:

$$\frac{0{,}00046 \cdot 25\,000\,000}{0{,}05} = \frac{4{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{7}}{5 \cdot 10^{-2}}.$$

Multipliser teller og samle tierpotensene:

$$= \frac{4{,}6 \cdot 2{,}5}{5} \cdot \frac{10^{-4+7}}{10^{-2}} = \frac{11{,}5}{5} \cdot 10^{\,3-(-2)} = 2{,}3 \cdot 10^{5}.$$

$$\boxed{2{,}3 \cdot 10^{5}}$$

### Oppgave 2 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs likningssystemet $2x + 3y = 6$ og $5x + 6y = 18$.

**Løsning.** Vi eliminerer $y$. Multipliser den første likningen med 2:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 12 \\ 5x + 6y &= 18 \end{aligned}$$

Trekk den øverste fra den nederste:

$$(5x - 4x) = 18 - 12 \implies x = 6.$$

Sett inn i $2x + 3y = 6$: $12 + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -6 \Rightarrow y = -2$.

$$\boxed{x = 6, \quad y = -2}$$

## Oppgave 3 (2 poeng)

**Oppgave.** Løs ulikheten $-2(x+2)(x-4) > 0$.

**Løsning.** Faktoren $-2$ er negativ. Del begge sider på $-2$ (ulikhetstegnet snur):

$$(x+2)(x-4) < 0.$$

Nullpunktene er $x = -2$ og $x = 4$. Parabelen $(x+2)(x-4)$ åpner oppover, så den er negativ *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{x \in \langle -2,\, 4 \rangle}$$

## Oppgave 4 (2 poeng)

**Oppgave.** Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 9} - \dfrac{x}{x+3}$.

**Løsning.** Faktoriser nevneren: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Fellesnevneren er $(x-3)(x+3)$. Utvid det andre leddet med $(x-3)$:

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x-3)(x+3)} - \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2 + x + 3 - (x^2 - 3x)}{(x-3)(x+3)}.$$

Telleren blir $2x^2 + x + 3 - x^2 + 3x = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Dermed

$$\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x-3}.$$

$$\boxed{\frac{x+1}{x-3}} \qquad (x \neq \pm 3)$$

## Oppgave 5 (5 poeng)

**Oppgave.** Løs likningene a) $\lg(4x) = 0$, b) $\lg\left(\dfrac{\sqrt{50}}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$, c) $2^{x^2} \cdot 2^{3x} = 16$.

**a)** $\lg(4x) = 0$ betyr $4x = 10^0 = 1$, altså

$$\boxed{x = \tfrac{1}{4}}.$$

**b)** $\lg\left(\dfrac{\sqrt{50}}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$ gir $\dfrac{\sqrt{50}}{x} = 10^{1/2} = \sqrt{10}$. Da er

$$x = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{50}{10}} = \boxed{\sqrt{5}}.$$

**c)** Samme grunntall, så vi legger sammen eksponentene: $2^{x^2+3x} = 2^4$. Dermed $x^2 + 3x = 4$, altså $x^2 + 3x - 4 = 0$, som faktoriseres til $(x + 4)(x - 1) = 0$:

$$\boxed{x = -4 \text{ eller } x = 1}.$$

## Oppgave 6 (2 poeng)

**Oppgave.** En rett linje går gjennom $(-7, -1)$ og $(5, 2)$. Bestem en likning for linjen ved regning.

**Løsning.** Stigningstallet:

$$a = \frac{2 - (-1)}{5 - (-7)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Bruk ettpunktsformelen med punktet $(5, 2)$:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) \implies y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}}$$

## Oppgave 7 (2 poeng)

**Oppgave.** Gitt likningen $ax^2 + 3x + 1 = x - 2$ med $a \neq 0$. Bestem en verdi av $a$ slik at likningen bare har én løsning.

**Løsning.** Samle alt på én side:

$$ax^2 + 3x + 1 - x + 2 = 0 \implies ax^2 + 2x + 3 = 0.$$

En andregradslikning har nøyaktig én løsning når diskriminanten er null:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot a \cdot 3 = 4 - 12a = 0 \implies a = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{a = \tfrac{1}{3}}$$

## Oppgave 8 (4 poeng)

**Oppgave.** $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. a) Bestem $f'(x)$. b) Bestem den momentane vekstfarten i $(-3, f(-3))$. c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten i $[-1, 2]$.

**a)** Deriver ledd for ledd:

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 8x + 1}.$$

**b)** Momentan vekstfart i $x = -3$ er $f'(-3)$:

$$f'(-3) = 3 \cdot 9 + 8 \cdot (-3) + 1 = 27 - 24 + 1 = \boxed{4}.$$

**c)** Gjennomsnittlig vekstfart i $[-1, 2]$ er

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}.$$

Vi regner $f(2) = 8 + 16 + 2 - 6 = 20$ og $f(-1) = -1 + 4 - 1 - 6 = -4$. Da blir

$$\frac{20 - (-4)}{3} = \frac{24}{3} = \boxed{8}.$$

## Oppgave 9 (3 poeng)

**Oppgave.** $\frac{3}{5}$ av elevene valgte fiskerett, resten kjøttrett. Halvparten av fiske-velgerne og $\frac{3}{4}$ av kjøtt-velgerne ønsket dessert. a) Lag et valgtre. b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig elev ønsket dessert.

**a) Valgtre.** Første forgrening er rettvalg, andre er dessert/ikke dessert:

$$\begin{array}{l} \text{Fisk } \tfrac{3}{5} \left\{ \text{dessert } \tfrac{1}{2}, \quad \text{ikke dessert } \tfrac{1}{2} \right. \\ \text{Kjøtt } \tfrac{2}{5} \left\{ \text{dessert } \tfrac{3}{4}, \quad \text{ikke dessert } \tfrac{1}{4} \right. \end{array}$$

(Andelen kjøtt er $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.)

**b)** Vi følger «dessert»-grenene og legger sammen:

$$P(\text{dessert}) = \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{fisk}} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{kjøtt}} = \frac{3}{10} + \frac{6}{20} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

$$\boxed{P(\text{dessert}) = \tfrac{3}{5} = 0{,}6}$$

## Oppgave 10 (3 poeng)

**Oppgave.** Fortegnsskjema for $f(x)$ og $f'(x)$ er gitt (skiftepunkter ved $x = -3, 2, 4, 7$). Lag en skisse av hvordan grafen til $f$ kan se ut.

**Tolkning av fortegnslinjene.** I figuren er det åpne sirkler på linja til $f(x)$ i $x = -3$ og $x = 4$, og på linja til $f'(x)$ i $x = -3$, $x = 2$ og $x = 7$. Stiplet linje betyr negativ, heltrukken linje betyr positiv. Vi leser av:

| Intervall | $x < -3$ | $-3 < x < 2$ | $2 < x < 4$ | $4 < x < 7$ | $x > 7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Merk at $f(x)$ er stiplet (negativ) på **begge** sider av $x = -3$ — funksjonsverdien er altså negativ der, ikke null. Først i $x = 4$ skifter $f$ fortegn. Tilsvarende er $f'(x)$ heltrukken (positiv) på **begge** sider av $x = 7$ — den deriverte er null akkurat i $x = 7$, men beholder samme fortegn.

Tolkning av den deriverte $f'$ (den bestemmer hvor $f$ stiger og synker):

- $f'(x) > 0$ for $x < -3$ $\to$ grafen **stiger**, og $f'$ skifter fra $+$ til $-$ i $x = -3$ $\to$ **toppunkt** i $x = -3$.
- $f'(x) < 0$ for $-3 < x < 2$ $\to$ grafen **synker**, og $f'$ skifter fra $-$ til $+$ i $x = 2$ $\to$ **bunnpunkt** i $x = 2$.
- $f'(x) > 0$ for $2 < x < 7$ og for $x > 7$ $\to$ grafen **stiger** hele veien fra $x = 2$ og videre. I $x = 7$ er $f'(x) = 0$, men $f'$ har **samme fortegn (positiv) på begge sider** $\to$ **terrassepunkt** i $x = 7$ (vannrett tangent uten topp/bunn).

Tolkning av selve $f$ (den forteller hvor grafen ligger i forhold til $x$-aksen):

- $f$ er negativ på begge sider av $x = -3$ $\to$ grafen har et **toppunkt under $x$-aksen** i $x = -3$ (funksjonsverdien er negativ).
- $f$ skifter fortegn fra $-$ til $+$ i $x = 4$ $\to$ grafen **krysser** $x$-aksen i $x = 4$ (på vei oppover).

**Skisse (beskrivelse).** Grafen kommer **opp** fra venstre (under aksen), stiger til et toppunkt i $x = -3$ som ligger **under** $x$-aksen (negativ verdi), synker så ned til et bunnpunkt i $x = 2$ (fortsatt under aksen), stiger igjen og **krysser** $x$-aksen i $x = 4$, fortsetter å stige, flater ut i et **terrassepunkt** i $x = 7$ (vannrett tangent), og stiger så videre.

$$\boxed{\text{Toppunkt (negativ verdi) i } x = -3,\ \ \text{bunnpunkt i } x = 2,\ \ \text{nullpunkt i } x = 4,\ \ \text{terrassepunkt i } x = 7.}$$

## Oppgave 11 (4 poeng)

**Oppgave.** En rettvinklet, likebeint trekant har hypotenus $4\sqrt{2}$. a) Bestem katetenes lengder. b) Bestem $\tan v$ (basisvinkelen). c) Vis at $\sin v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**a)** I en likebeint, rettvinklet trekant er de to katetene like lange. Kall dem $k$. Pytagoras gir

$$k^2 + k^2 = (4\sqrt{2})^2 \implies 2k^2 = 32 \implies k^2 = 16 \implies k = 4.$$

$$\boxed{\text{Begge kateter er 4.}}$$

**b)** Basisvinkelen $v$ har motstående katet 4 og hosliggende katet 4:

$$\tan v = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \frac{4}{4} = \boxed{1}.$$

(Trekanten er likebeint, så $v = 45°$.)

**c)** Med motstående katet 4 og hypotenus $4\sqrt{2}$:

$$\sin v = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

### Oppgave 12 (2 poeng)

**Oppgave.** En trekant har to sider $3\sqrt{2}$ og 8 med mellomliggende vinkel 45°. Bestem arealet.

**Løsning.** Arealsetningen med to sider og mellomliggende vinkel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vi regner: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, så

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = \boxed{12}.$$

> **Merk.** Det studentlagde løsningsforslaget hos matematikk.net oppgir 24, men har der glemt faktoren $\frac{1}{2}$ i arealsetningen ($A = \frac{1}{2}ab\sin C$). Riktig areal er 12.

### Oppgave 13 (3 poeng)

**Oppgave.** Stein løser $\dfrac{\sin x}{10} = \dfrac{\sin 40°}{8}$ og får $x = 53{,}5°$. a) Bestem den andre løsningen. b) Lag skisser av de to trekantene.

**a)** Sinuslikninger har to løsninger i intervallet 0°–180° (en trekantvinkel): hvis $x_1$ er en løsning, er $x_2 = 180° - x_1$ også en løsning, fordi $\sin(180° - x) = \sin x$. Da blir

$$x_2 = 180° - 53{,}5° = \boxed{126{,}5°}.$$

**b) Skisser.** Begge trekanter har en side 8 motstående en vinkel på 40°, og en side 10 motstående vinkelen $x$:

- **Trekant 1 (spiss):** $x = 53{,}5°$. De tre vinklene er 40°, 53,5° og 86,5°. Dette er en spissvinklet trekant.
- **Trekant 2 (stump):** $x = 126{,}5°$. De tre vinklene er 40°, 126,5° og 13,5°. Dette er en stumpvinklet trekant.

I begge tilfeller ligger den lengste oppgitte siden (10) motstående den nest største vinkelen $x$; forskjellen er om $x$ er spiss eller stump. Dette er det klassiske **tvetydige tilfellet** (SSA) der to sider og en motstående vinkel kan gi to ulike trekanter.

# DEL 2 — Med hjelpemidler

## Oppgave 1 (6 poeng)

**Oppgave.** Symfyse-fundusmålet er $G(x) = -0{,}0011x^3 + 0{,}097x^2 - 1{,}945x + 29{,}3$ cm i uke $x$, for $x \in [23, 42]$. a) Tegn vekstkurven. b) Bestem momentan vekstfart i $x = 29$ og gi en praktisk tolkning. c) Gjennomsnittlig økning per uke fra uke 23 til uke 40.

**a) Graftegner.** Tegn $G$ i et grafverktøy (f.eks. GeoGebra) for $x \in [23, 42]$. Kurven stiger jevnt fra $G(23) \approx 22{,}5$ cm til $G(42) \approx 37{,}2$ cm, med en svak avflating mot slutten — en realistisk vekstkurve for fosteret.

**b) Momentan vekstfart i $x = 29$.** Vi deriverer:

$$G'(x) = -0{,}0033x^2 + 0{,}194x - 1{,}945.$$

Sett inn $x = 29$ (regnes med hjelpemiddel/CAS):

$$G'(29) = -0{,}0033 \cdot 29^2 + 0{,}194 \cdot 29 - 1{,}945 \approx 0{,}91.$$

$$\boxed{G'(29) \approx 0{,}91 \text{ cm/uke}}$$

*Praktisk tolkning:* I uke 29 øker symfyse-fundusmålet med omtrent 0,91 cm per uke. Det vil si at avstanden fra underlivsbeinet til toppen av livmoren vokser med rundt 0,9 cm i løpet av denne uka.

**c) Gjennomsnittlig økning per uke fra uke 23 til uke 40.**

$$\frac{G(40) - G(23)}{40 - 23} = \frac{36{,}3 - 22{,}494\ldots}{17} \approx \frac{13{,}81}{17} \approx 0{,}81.$$

$$\boxed{\approx 0{,}81 \text{ cm/uke}}$$

I gjennomsnitt øker symfyse-fundusmålet med ca. 0,81 cm per uke i dette tidsrommet.

## Oppgave 2 (4 poeng)

**Oppgave.** 30 elever: 12 har tysk, 14 har 1T, 10 har verken tysk eller 1T. a) Sett opp krysstabell/venndiagram. b) $P(\text{tysk, men ikke 1T})$. c) Gitt at en elev ikke har 1T, $P(\text{tysk})$.

**a) Krysstabell.** Siden 10 har verken tysk eller 1T, har $30 - 10 = 20$ elever minst ett av fagene. Antall som har *begge* fag:

$$|\text{tysk} \cap 1T| = 12 + 14 - 20 = 6.$$

Da fyller vi ut tabellen:

| | Tysk | Ikke tysk | Sum |
|---|---|---|---|
| **1T** | 6 | 8 | 14 |
| **Ikke 1T** | 6 | 10 | 16 |
| **Sum** | 12 | 18 | 30 |

**b)** «Tysk, men ikke 1T» er ruta nede til venstre: 6 av 30 elever:

$$P(\text{tysk} \cap \overline{1T}) = \frac{6}{30} = \boxed{\tfrac{1}{5} = 0{,}2}.$$

**c)** Betinget sannsynlighet. Av de 16 som ikke har 1T, har 6 tysk:

$$P(\text{tysk} \mid \overline{1T}) = \frac{6}{16} = \boxed{\tfrac{3}{8} = 0{,}375}.$$

## Oppgave 3 (3 poeng)

**Oppgave.** I figuren er $\triangle ABC$ rettvinklet i $C$ med $AB = 13$, $AC = 12$. $ED$ står normalt på $AB$ i $D$ med $AD = 9{,}6$, og danner $\triangle ADE$. Bestem lengden $ED$.

**Løsning.** I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90^\circ$, så $AB = 13$ er hypotenusen. Pytagoras gir

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

$\triangle ADE$ og $\triangle ACB$ er **formlike**: de deler vinkelen i $A$, og begge har en rett vinkel ($\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$). Forholdet mellom samsvarende sider er likt. Siden $AD$ og $AC$ er hosliggende katet til vinkel $A$, og $ED$ og $BC$ er motstående katet:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \implies ED = BC \cdot \frac{AD}{AC} = 5 \cdot \frac{9{,}6}{12} = 5 \cdot 0{,}8.$$

$$\boxed{ED = 4}$$

## Oppgave 4 (3 poeng)

**Oppgave.** Firkant $ABCD$ med $AD = a$, $AC = 2a$, $BC = \sqrt{3}\,a$, $\angle ADC = 90^\circ$ og $\angle BCD = 165^\circ$. a) Bestem $CD$ uttrykt ved $a$. b) Bestem $AB$ uttrykt ved $a$.

**a)** I $\triangle ACD$ er $\angle ADC = 90^\circ$, så $AC = 2a$ er hypotenusen og $AD = a$, $CD$ er katetene. Pytagoras:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \boxed{\sqrt{3}\,a}.$$

**b)** Vi trenger vinkelen $\angle ACB$ i $\triangle ACB$. Først finner vi $\angle ACD$ i den rettvinklede trekanten $ACD$:

$$\cos(\angle ACD) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \angle ACD = 30^\circ.$$

Diagonalen $AC$ deler vinkelen ved $C$, så

$$\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 165^\circ - 30^\circ = 135^\circ.$$

I $\triangle ACB$ kjenner vi nå $AC = 2a$, $BC = \sqrt{3}\,a$ og mellomliggende vinkel $\angle ACB = 135^\circ$. Cosinussetningen:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 135^\circ.$$

Med $\cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$AB^2 = (2a)^2 + (\sqrt{3}\,a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot \sqrt{3}\,a \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4a^2 + 3a^2 + 2\sqrt{6}\,a^2 = (7 + 2\sqrt{6})\,a^2.$$

Dermed

$$AB = a\sqrt{7 + 2\sqrt{6}}.$$

Uttrykket under rottegnet er et fullstendig kvadrat, siden $(\sqrt{6}+1)^2 = 6 + 2\sqrt{6} + 1 = 7 + 2\sqrt{6}$. Da kan svaret skrives helt eksakt:

$$AB = a\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} = (\sqrt{6}+1)\,a \approx \boxed{3{,}45\,a}.$$

## Oppgave 5 (8 poeng)

**Oppgave.** $f(x) = x^3 - 2k\,x^2 + k^2x$ med $k > 0$. a) Bestem nullpunktene. b) Bestem $f'(x)$. c) Avgjør hvilken graf (A, B, C) som hører til $f$. d) Bruk CAS til å finne stigningstallet til linja gjennom topp- og bunnpunktet. e) Vis at $f$ bare har én tangent med stigningstall $-\frac{1}{3}k^2$, og bestem tangeringspunktet $T$.

**a) Nullpunkter.** Faktoriser ut $x$:

$$f(x) = x(x^2 - 2k\,x + k^2) = x(x-k)^2.$$

Nullpunktene er der $x = 0$ eller $(x-k)^2 = 0$:

$$\boxed{x = 0 \ \text{ og } \ x = k}$$

(der $x = k$ er et dobbelt nullpunkt).

**b) Den deriverte.**

$$f'(x) = 3x^2 - 4k\,x + k^2 = (x-k)(3x-k).$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 4k\,x + k^2}$$

**c) Hvilken graf?** Argumentasjon ut fra a) og b):

- Ledende ledd er $x^3$ (positiv koeffisient), så grafen går **mot** $+\infty$ **til høyre** og mot $-\infty$ til venstre.
- Fra a) er begge nullpunktene **ikke-negative** ($x = 0$ og $x = k > 0$), og grafen *tangerer* $x$-aksen i det doble nullpunktet $x = k$ (den krysser ikke der).
- Fra $f'(x) = (x-k)(3x-k)$ er de stasjonære punktene $x = \frac{k}{3}$ (toppunkt) og $x = k$ (bunnpunkt). Begge ligger til **høyre for $y$-aksen**, og bunnpunktet ligger på $x$-aksen ($f(k) = 0$).

Grafen krysser altså i origo, stiger til et toppunkt, synker ned og *berører* $x$-aksen ved $x = k$, og stiger så videre — alt med begge vendepunktene på den positive $x$-siden og høyre gren oppover. Dette passer med

$$\boxed{\text{graf C}}.$$

(Graf A har høyre gren *nedover* — feil ledende koeffisient. Graf B er strengt voksende uten topp-/bunnpunkt — feil.)

**d) Stigningstall for linja gjennom topp- og bunnpunkt (CAS).** Topp- og bunnpunkt:

- Toppunkt: $x = \frac{k}{3}$, $f\left(\frac{k}{3}\right) = \dfrac{4k^3}{27}$.
- Bunnpunkt: $x = k$, $f(k) = 0$.

Stigningstallet til linja gjennom dem:

$$a = \frac{\dfrac{4k^3}{27} - 0}{\dfrac{k}{3} - k} = \frac{\dfrac{4k^3}{27}}{-\dfrac{2k}{3}} = \frac{4k^3}{27} \cdot \left(-\frac{3}{2k}\right) = -\frac{2k^2}{9}.$$

$$\boxed{a = -\frac{2k^2}{9}}$$

*CAS (eksempel i GeoGebra):* `f(x):=x^3-2k x^2+k^2 x`, `Løs(f'(x)=0)` gir $x = \frac{k}{3}$ og $x = k$; deretter `Stigning((k/3, f(k/3)), (k, f(k)))` som gir $-\frac{2}{9}k^2$.

**e) Tangent med stigningstall $-\frac{1}{3}k^2$.** Tangentens stigningstall i et punkt er $f'(x)$. Vi løser

$$f'(x) = -\frac{1}{3}k^2 \implies 3x^2 - 4k\,x + k^2 = -\frac{1}{3}k^2.$$

Gang med 3 og samle:

$$9x^2 - 12k\,x + 3k^2 = -k^2 \implies 9x^2 - 12k\,x + 4k^2 = 0.$$

Venstresiden er et fullstendig kvadrat:

$$9x^2 - 12k\,x + 4k^2 = (3x - 2k)^2 = 0.$$

Det gir nøyaktig **én** løsning, $x = \frac{2k}{3}$ — derfor finnes det bare én slik tangent. Tilhørende funksjonsverdi:

$$f\left(\tfrac{2k}{3}\right) = \frac{2k}{3}\left(\frac{2k}{3} - k\right)^2 = \frac{2k}{3} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)^2 = \frac{2k}{3} \cdot \frac{k^2}{9} = \frac{2k^3}{27}.$$

$$\boxed{T = \left(\frac{2k}{3},\ \frac{2k^3}{27}\right)}$$

---

*Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.*