

Matematikk 1T — Høst 2020

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Bestem en likning for den rette linjen som er tegnet i koordinatsystemet.

Løsning. Vi leser av to punkter på linjen i figuren. Linjen skjærer y -aksen i $(0, -1)$, og den går gjennom $(1, 1)$. Stigningstallet blir

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2,$$

og konstantleddet er $b = -1$ (skjæring med y -aksen). Linjen er dermed

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv svaret på standardform: $\frac{6,2 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^8}{0,0005}$.

Løsning. Vi regner med teller og nevner hver for seg. I telleren:

$$6,2 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^8 = (6,2 \cdot 2,5) \cdot 10^{4+8} = 15,5 \cdot 10^{12} = 1,55 \cdot 10^{13}.$$

Nevneren er $0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Da blir

$$\frac{1,55 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{1,55}{5} \cdot 10^{13-(-4)} = 0,31 \cdot 10^{17} = \boxed{3,1 \cdot 10^{16}}.$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $\begin{cases} x + 2y = 16 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$.

Løsning. Fra den andre likningen er $y = 3x - 6$. Sett inn i den første:

$$x + 2(3x - 6) = 16 \implies x + 6x - 12 = 16 \implies 7x = 28 \implies x = 4.$$

Da blir $y = 3 \cdot 4 - 6 = 6$.

$$\boxed{x = 4, \quad y = 6}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{(x + y)^2 - 4xy}{x - y}$.

Løsning. Utvid teller og kvadratet:

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

Da blir brøken

$$\frac{(x - y)^2}{x - y} = \boxed{x - y} \quad (x \neq y).$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. For hvilke verdier av k blir $4x^2 + kx + \frac{1}{4}$ et fullstendig kvadrat?

Løsning. Et andregradsuttrykk $ax^2 + bx + c$ er et fullstendig kvadrat når det har en dobbel rot, altså når diskriminanten er null:

$$k^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \implies k^2 - 4 = 0 \implies k^2 = 4.$$

$$\boxed{k = 2 \text{ eller } k = -2}$$

Kontroll: $4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = (2x + \frac{1}{2})^2$ og $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = (2x - \frac{1}{2})^2$.

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{5^{1/2} \cdot 4^{-1} \cdot 8^{2/3}}{\sqrt{20} \cdot 3^0}$.

Løsning. Vi forenkler hvert ledd. $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$, og $3^0 = 1$. Da blir telleren

$$5^{1/2} \cdot 4^{-1} \cdot 4 = 5^{1/2} = \sqrt{5}.$$

Nevneren er $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$. Dermed

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{\lg 1000 \cdot \lg \frac{1}{10}}{\lg 0,01 \cdot \lg 10^{-1/2}}$.

Løsning. Vi bruker at $\lg 10^n = n$:

- $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$
- $\lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1$
- $\lg 0,01 = \lg 10^{-2} = -2$
- $\lg 10^{-1/2} = -\frac{1}{2}$

Dette gir

$$\frac{3 \cdot (-1)}{(-2) \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-3}{1} = \boxed{-3}.$$

Oppgave 8 (4 poeng)

Oppgave. Løs likningene a) $\frac{2^{2+x}}{2^{1-2x}} = 64$ og b) $\lg\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right) = -1$.

a) Vi samler potensene med samme grunntall:

$$\frac{2^{2+x}}{2^{1-2x}} = 2^{(2+x)-(1-2x)} = 2^{1+3x}.$$

Da $64 = 2^6$, må eksponentene være like:

$$1 + 3x = 6 \implies 3x = 5 \implies \boxed{x = \frac{5}{3}}.$$

b) $\lg(\cdot) = -1$ betyr at argumentet er $10^{-1} = \frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{1}{10} \implies x^2 - 3x = 10 \implies x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Faktorisering: $(x - 5)(x + 2) = 0$, så $x = 5$ eller $x = -2$. Begge gir $x^2 - 3x = 10 > 0$, så argumentet til logaritmen er positivt og begge er gyldige:

$$\boxed{x = 5 \text{ eller } x = -2}$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Oppgave. Grafen til en funksjon f er tegnet. Løs ulikheten $f(x) < 2x - 4$, og grunngi svaret.

Løsning. Av grafen leser vi at f er en andregradsfunksjon med nullpunkter $x = -1$ og $x = 4$, og bunnpunkt $(1,5; -6,25)$. Det gir

$$f(x) = (x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4.$$

Vi løser ulikheten algebraisk:

$$x^2 - 3x - 4 < 2x - 4 \implies x^2 - 5x < 0 \implies x(x - 5) < 0.$$

Uttrykket $x(x - 5)$ er negativt mellom nullpunktene $x = 0$ og $x = 5$. Grafisk: dette er der parabolen f ligger *under* linjen $y = 2x - 4$.

$$x \in \langle 0, 5 \rangle$$

Oppgave 10 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$. Undersøk hvor mange tangenter med stigningstall -3 grafen har, og bestem likningen(e) for tangenten(e).

Løsning. Et tangentspunkt med stigningstall -3 må oppfylle $f'(x) = -3$. Vi deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

Likningen $f'(x) = -3$:

$$3x^2 + 6x = -3 \implies 3x^2 + 6x + 3 = 0 \implies x^2 + 2x + 1 = 0 \implies (x + 1)^2 = 0.$$

Det gir én løsning, $x = -1$ (dobbel rot). Grafen har altså **nøyaktig én** tangent med stigningstall -3 .

Tangentspunktet er $(-1, f(-1))$, der $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3 = -1 + 3 + 3 = 5$. Tangentlinjen $y = -3x + b$ gjennom $(-1, 5)$:

$$5 = -3 \cdot (-1) + b \implies 5 = 3 + b \implies b = 2.$$

$$y = -3x + 2$$

Oppgave 11 (4 poeng)

Oppgave. Charlotte og Gunnar er i en gruppe på 10 elever. To elever trekkes tilfeldig ut. a) Sannsynet for at verken Charlotte eller Gunnar trekkes ut. b) Sannsynet for at det blir nettopp Charlotte og Gunnar.

Antall måter å trekke 2 av 10 (uten rekkefølge) er $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

a) Vi skal velge 2 blant de 8 andre (ikke Charlotte, ikke Gunnar): $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ gunstige.

$$P(\text{verken}) = \frac{28}{45} = \boxed{\frac{28}{45}} \approx 0,62.$$

b) Det finnes bare ett gunstig utfall (paret {Charlotte, Gunnar}):

$$P(\text{Charlotte og Gunnar}) = \frac{1}{45} = \boxed{\frac{1}{45}} \approx 0,022.$$

Oppgave 12 (6 poeng)

Oppgave. a) Bruk den rettvinklede, likebeinte trekanten $\triangle ABC$ (kateter $AC = AB = 1$, rett vinkel i A) til å vise at $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) og c) I $\triangle PQR$ er $PR = 8$, $PQ = 6\sqrt{2}$ og $\angle P = 45^\circ$: bestem arealet, og bestem QR eksakt.

a) Trekanten har rett vinkel i A og kateter $AC = AB = 1$. Begge spisse vinkler er da 45° . Hypotenusen er, ved Pytagoras,

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Med utgangspunkt i vinkelen 45° ved B (eller C) blir

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Altså $\boxed{\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

b) Areal med to sider og mellomliggende vinkel ($\angle P = 45^\circ$ mellom PR og PQ):

$$A = \frac{1}{2} PR \cdot PQ \cdot \sin P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 48 = \boxed{24}.$$

c) Cosinussetningen for siden QR overfor vinkelen $\angle P$:

$$QR^2 = PR^2 + PQ^2 - 2 \cdot PR \cdot PQ \cdot \cos P = 8^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vi regner ut leddene: $8^2 = 64$, $(6\sqrt{2})^2 = 72$, og $2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$. Dermed

$$QR^2 = 64 + 72 - 96 = 40 \implies QR = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}}.$$

Oppgave 13 (3 poeng)

Oppgave. En bonde skal gjerde inn et rektangulært område langs en elv (ingen gjerde langs elva) med lengde x og bredde y . Det brukes til sammen 1000 m gjerde. Bestem x og y slik at arealet blir størst mulig.

Løsning. Området ligger inntil elva. Den ene langsiden (x , langs elva) trenger ikke gjerde; vi gjerder den andre langsiden (x) og de to kortsidene (y). Gjerdelengden er

$$x + 2y = 1000 \implies x = 1000 - 2y.$$

Arealet som funksjon av y :

$$A(y) = x \cdot y = (1000 - 2y)y = 1000y - 2y^2.$$

Dette er en parabel som vender ned, med maksimum der $A'(y) = 0$:

$$A'(y) = 1000 - 4y = 0 \implies y = 250.$$

Da blir $x = 1000 - 2 \cdot 250 = 500$, og største areal

$$A = 500 \cdot 250 = 125\,000 \text{ m}^2.$$

$$\boxed{x = 500 \text{ m}, \quad y = 250 \text{ m} \quad (A = 125\,000 \text{ m}^2)}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Oppgave. Pulsen til Ole (i prosent av makspuls) x minutter etter start er $P(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 2,4x + 74$ for $x \in [0, 50]$. a) Tegn grafen. b) Hvor mange minutter var pulsen høyere enn 92% av makspuls? c) Bestem den momentane vekstfarten når $x = 5$, og gi en praktisk tolkning.

a) Grafen tegnes med digitalt verktøy (graftegner) for $x \in [0, 50]$. Den starter i $P(0) = 74$, stiger til et lokalt toppunkt i $x = 20$ (der $P = 94$), synker til et lokalt bunnpunkt i $x = 40$ (der $P = 90$), og stiger igjen til $P(50) = 94$.

b) Vi løser $P(x) = 92$:

$$0,001x^3 - 0,09x^2 + 2,4x + 74 = 92.$$

Med CAS (eller ved skjæring i graftegner) får vi tre løsninger:

$$x = 30 - 10\sqrt{3} \approx 12,7, \quad x = 30, \quad x = 30 + 10\sqrt{3} \approx 47,3.$$

Siden $P(50) = 94 > 92$, ligger pulsen over 92 % på **to** strekninger:

$$\langle 12,7; 30 \rangle \quad \text{og} \quad \langle 47,3; 50 \rangle.$$

Samlet tid blir

$$(30 - 12,7) + (50 - 47,3) = (10\sqrt{3}) + (20 - 10\sqrt{3}) = \boxed{20 \text{ minutter}}.$$

c) Momentan vekstfart er den deriverte:

$$P'(x) = 0,003x^2 - 0,18x + 2,4.$$

$$P'(5) = 0,003 \cdot 25 - 0,18 \cdot 5 + 2,4 = 0,075 - 0,9 + 2,4 = 1,575.$$

$$\boxed{P'(5) = 1,575 \approx 1,6}$$

Tolkning: 5 minutter etter start stiger Oles puls med ca. 1,6 prosentpoeng av makspuls per minutt.

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. Tabell over antall deltakere i et mosjonsløp: (2000, 35), (2005, 152), (2010, 240), (2015, 338), (2020, 475). La x være antall år etter 2000. a) Bruk regresjon til å finne en lineær funksjon M . b) Hva forteller stigningstallet til M om den praktiske situasjonen?

a) Med $x = 0, 5, 10, 15, 20$ og tilhørende deltakertall kjører vi lineær regresjon (digitalt verktøy):

$$\boxed{M(x) \approx 21,3x + 34,8}$$

b) Stigningstallet er ca. 21,3. Det betyr at antall deltakere i mosjonsløpet øker med omtrent **21 deltakere per år** i perioden 2000–2020.

Oppgave 3 (3 poeng)

Oppgave. I en klasse er det 20 elever: 14 er med i idrettslaget, 7 er med i korpset, og 2 er verken med i idrettslaget eller korpset. Én elev trekkes tilfeldig. Bestem sannsynet for at eleven er med i idrettslaget, men ikke i korpset.

Løsning. La I = idrettslag og K = korps. Antall som er med i minst ett av lagene er $20 - 2 = 18$. Med inklusjon–eksklusjon:

$$|I \cup K| = |I| + |K| - |I \cap K| \implies 18 = 14 + 7 - |I \cap K| \implies |I \cap K| = 3.$$

Antall som er med i idrettslaget, men ikke i korpset:

$$|I| - |I \cap K| = 14 - 3 = 11.$$

$$P = \frac{11}{20} = \boxed{0,55}$$

Oppgave 4 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x(x-a)(x-b) + c$ der $a > 0$ og $b > 0$. a) Bruk CAS til å bestemme $f'(x)$. b) Vis med den deriverte at grafen synker raskest når $x = \frac{1}{3}(a+b)$. c) Vis med CAS at tangenten til grafen i punktet $(\frac{a}{2}, f(\frac{a}{2}))$ skjærer grafen i punktet (b, c) .

a) Vi utvider $f(x) = x(x-a)(x-b) + c = x^3 - (a+b)x^2 + abx + c$ og deriverer. Med CAS får vi

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2(a+b)x + ab}.$$

b) Grafen synker raskest der vekstfarten $f'(x)$ er minst (mest negativ). $f'(x)$ er en andregradsfunksjon med positiv ledende koeffisient ($3 > 0$), så den har et minimum i toppunktets x -verdi, altså der $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 6x - 2(a+b) = 0 \implies x = \frac{2(a+b)}{6} = \frac{a+b}{3} = \frac{1}{3}(a+b).$$

Her er f'' null og skifter fortegn fra negativ til positiv, så f' har sitt minimum, og grafen til f synker raskest. Dette er vendepunktet til f .

c) Med CAS regner vi ut tangentpunktets verdier ved $x = \frac{a}{2}$:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^3}{8} + \frac{a^2b}{4} + c, \quad f'\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}.$$

Tangentlinjen $T(x) = f'\left(\frac{a}{2}\right)(x - \frac{a}{2}) + f\left(\frac{a}{2}\right)$ forenkles med CAS til

$$T(x) = -\frac{a^2}{4}x + \frac{a^2b}{4} + c.$$

Vi setter inn $x = b$:

$$T(b) = -\frac{a^2b}{4} + \frac{a^2b}{4} + c = c.$$

Samtidig er $f(b) = b(b-a)(b-b) + c = 0 + c = c$. Siden både tangenten og grafen har y -verdi c ved $x = b$, går de begge gjennom punktet (b, c) . Dermed skjærer tangenten grafen i (b, c) .

$$\boxed{T(b) = f(b) = c \implies \text{tangenten skjærer grafen i } (b, c)}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. Elevene skal utlede arealformelen for et trapes, $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$ (parallele sider a og b , høyde h). a) Adrian deler trapeset i to trekanter med en diagonal. b) Iris deler i tre trekanter via midtpunktet på siden a . c) Sanne legger en kopi av trapeset inntil det opprinnelige og får et parallellogram — grunngi at det er et parallellogram, og fullfør utledningen.

a) Adrians metode (diagonal). Diagonalen deler trapeset i to trekanter. Begge har høyde h (avstanden mellom de parallelle sidene). Den ene har grunnlinje a , den andre har grunnlinje b :

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} a h}_{\text{trekant 1}} + \underbrace{\frac{1}{2} b h}_{\text{trekant 2}} = \frac{1}{2} h(a+b) = \boxed{\frac{a+b}{2} \cdot h}.$$

b) Iris' metode (midtpunkt, tre trekanter). Iris merker midtpunktet M på den lange siden a og deler trapeset i tre trekanter. To av dem har grunnlinje $\frac{a}{2}$ (de to halvdelene av a) og høyde h , og den tredje har grunnlinje b og høyde h :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} h \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b \right) = \frac{1}{2} h(a+b) = \boxed{\frac{a+b}{2} \cdot h}.$$

c) Sannes metode (kopi \rightarrow parallellogram). Sanne snur en kopi av trapeset 180° og legger den inntil det opprinnelige.

Grunngiving (parallellogram): Den nye figuren har to par motstående sider som er parvis like lange og parallelle. De parallelle sidene a og b legges etter hverandre, slik at hver av de to lange sidene i den sammensatte figuren får lengde $a+b$, og disse to er parallelle. De to skråsidene er den samme siden i trapeset og kopien (den ene er kopiens, snudd), så de er like lange og parallelle. En firkant med to par like lange og parallelle motstående sider er et parallellogram.

Parallellogrammet har grunnlinje $a+b$ og høyde h , så arealet er $(a+b)h$. Dette er **to** trapeser, så ett trapes har arealet

$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = \boxed{\frac{a+b}{2} \cdot h}.$$

Alle tre metodene gir samme formel, $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.