

Matematikk 1T — Høst 2021

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv svaret på standardform: $\frac{6,2 \cdot 10^7 + 2,5 \cdot 10^8}{0,000002}$.

Løsning. Vi summerer telleren. Skriv begge ledd med samme tierpotens:

$$6,2 \cdot 10^7 + 2,5 \cdot 10^8 = 6,2 \cdot 10^7 + 25 \cdot 10^7 = 31,2 \cdot 10^7 = 3,12 \cdot 10^8.$$

Nevneren er $0,000002 = 2 \cdot 10^{-6}$. Da blir

$$\frac{3,12 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{3,12}{2} \cdot 10^{8-(-6)} = 1,56 \cdot 10^{14}.$$

$$\boxed{1,56 \cdot 10^{14}}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Løsning. Vi finner nullpunktene til $x^2 + 2x - 8$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \implies x = -4 \text{ eller } x = 2.$$

Altså er $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er negativt *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-4 < x < 2}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$.

Løsning. Vi faktorerer teller og nevner:

$$2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1), \quad x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Dermed

$$\frac{2(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2(x + 1)}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

$$\boxed{\frac{2(x + 1)}{x - 1}}$$

Oppgave 4 (3 poeng)

Oppgave. Grafen til en andregradsfunksjon f går gjennom punktene $(0, 12)$, $(-3, 0)$ og $(2, 0)$. Bestem $f(x)$.

Løsning. Nullpunktene er $x = -3$ og $x = 2$, så $f(x) = a(x + 3)(x - 2)$. Punktet $(0, 12)$ gir verdien av a :

$$f(0) = a \cdot 3 \cdot (-2) = -6a = 12 \implies a = -2.$$

Da er

$$f(x) = -2(x + 3)(x - 2) = -2(x^2 + x - 6) = -2x^2 - 2x + 12.$$

$$\boxed{f(x) = -2x^2 - 2x + 12}$$

Oppgave 5 (4 poeng)

Oppgave. Vis at likningssystemet $x^2 + 2x - y = -1$ og $x + y = -2$ ikke har løsning, a) grafisk og b) ved regning.

a) **Grafisk.** Vi skriver begge likningene som y uttrykt ved x :

$$y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \quad \text{og} \quad y = -x - 2.$$

Parabelen $y = (x + 1)^2$ har bunnpunkt $(-1, 0)$ og ligger aldri under x -aksen. Linjen $y = -x - 2$ har positivt funksjonsverdi bare for $x < -2$ og er negativ for $x > -2$; i $x = -1$ er $y = -1 < 0$. Tegner vi de to grafene i samme koordinatsystem, ser vi at parabellen ligger helt over linjen — de skjærer hverandre aldri. Da har systemet ingen løsning.

b) **Ved regning.** Sett $y = -x - 2$ inn i den første likningen $y = (x + 1)^2$:

$$-x - 2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \implies x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Diskriminanten er

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Siden diskriminanten er negativ, har andregradslikningen ingen reelle løsninger. Følgelig har likningssystemet ingen løsning. ■

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1} + 9^0}{8^{\frac{4}{3}}}$.

Løsning. Vi regner ut hvert ledd. I telleren:

$$9^{\frac{1}{2}} = 3, \quad 9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad 9^0 = 1,$$

så telleren er $1 + 1 = 2$. I nevneren:

$$8^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

Dermed

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$\boxed{\frac{1}{8}}$$

Oppgave 7 (3 poeng)

Oppgave. Løs likningene a) $\lg(2x - 6) = 2$ og b) $\frac{3^{2x} + 3^{2x} + 4}{2} = 29$.

a) $\lg(2x - 6) = 2$ betyr at $2x - 6 = 10^2 = 100$:

$$2x = 106 \implies x = 53.$$

Kontroll: $2 \cdot 53 - 6 = 100 > 0$, så uttrykket inni logaritmen er gyldig.

$$\boxed{x = 53}$$

b) I telleren er $3^{2x} + 3^{2x} = 2 \cdot 3^{2x}$, så

$$\frac{2 \cdot 3^{2x} + 4}{2} = 29 \implies 2 \cdot 3^{2x} + 4 = 58 \implies 3^{2x} = 27 = 3^3.$$

Like grunntall gir like eksponenter: $2x = 3$, altså

$$x = \frac{3}{2}$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. I trekant ABC er $AC = 2$, $AB = 4$ og $\angle A = 120^\circ$. Bestem lengden av siden BC .

Løsning. BC ligger motstående den kjente vinkelen $\angle A$, så vi bruker cosinussetningen:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ.$$

Med $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$:

$$BC^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28.$$

Dermed er $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$$BC = 2\sqrt{7} \approx 5,29$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant har omkrets 12, og en av sidene er 2. Bestem arealet av trekanten.

Løsning. Hypotenusen kan ikke være 2, for da måtte begge katetene være mindre enn 2, og omkretsen kunne ikke bli 12. Altså er siden 2 en katet. Kall den andre kateten b og hypotenusen c . Da er

$$2 + b + c = 12 \implies b + c = 10 \implies c = 10 - b.$$

Pytagoras gir $2^2 + b^2 = c^2$:

$$4 + b^2 = (10 - b)^2 = 100 - 20b + b^2 \implies 20b = 96 \implies b = \frac{24}{5} = 4,8.$$

Den andre kateten er altså 4,8 (og hypotenusen $c = 5,2$). Arealet er

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4,8 = 4,8.$$

$$A = 4,8$$

Oppgave 10 (5 poeng)

Oppgave. En 12-sidet terning (tallene $1, 2, \dots, 12$, alle like sannsynlige) kastes to ganger. a) Sannsynligheten for tallet 10 i begge kast. b) Vurder Maris påstand om at $P(\{10, 12\}) = \frac{1}{72}$. c) Vurder Maris påstand om at $P(\text{sum} \geq 20) > 10\%$.

a) Kastene er uavhengige, og $P(10) = \frac{1}{12}$ i hvert kast:

$$P(10 \text{ begge}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{144}}.$$

b) Å få «10 og 12» betyr at tallene 10 og 12 opptrer i de to kastene, uansett rekkefølge. To gunstige rekkefølger (10 først, så 12, eller omvendt):

$$P(\{10, 12\}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{144} = \frac{1}{72}.$$

Påstanden til Mari **stemmer**.

$$\boxed{\frac{1}{72}}$$

c) De gunstige utfallene ($\text{sum} \geq 20$) blant $12 \cdot 12 = 144$ like sannsynlige par er:

Sum	Par (a, b)	Antall
20	$(8, 12), (9, 11), \dots, (12, 8)$	5
21	$(9, 12), (10, 11), (11, 10), (12, 9)$	4
22	$(10, 12), (11, 11), (12, 10)$	3
23	$(11, 12), (12, 11)$	2
24	$(12, 12)$	1

Til sammen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ gunstige utfall, så

$$P(\text{sum} \geq 20) = \frac{15}{144} = \frac{5}{48} \approx 0,104 = 10,4\%.$$

Siden $10,4\% > 10\%$, **stemmer** påstanden til Mari.

$$\boxed{\frac{5}{48} \approx 10,4\% > 10\%}$$

Oppgave 11 (3 poeng)

Oppgave. Grafen til en tredjegradsfunksjon f har bunnpunkt $(-2, -11)$ og toppunkt $(4, 25)$. Tangenten i $(1, 7)$ er $y = 9x - 2$. Skisser grafen til f' .

Løsning. f er en tredjegradsfunksjon, så f' er en andregradsfunksjon — en parabel. Vi leser av tre opplysninger:

- I bunnpunktet $x = -2$ er $f'(-2) = 0$ (vannrett tangent).
- I toppunktet $x = 4$ er $f'(4) = 0$ (vannrett tangent).
- I $(1, 7)$ er stigningstallet til tangenten 9, altså $f'(1) = 9$.

Siden f' har nullpunkter i $x = -2$ og $x = 4$, kan vi skrive $f'(x) = a(x+2)(x-4)$. Verdien $f'(1) = 9$ gir

$$a(1+2)(1-4) = a \cdot 3 \cdot (-3) = -9a = 9 \implies a = -1.$$

Altså

$$f'(x) = -(x+2)(x-4) = -x^2 + 2x + 8.$$

Dette er en parabel som **åpner nedover**, med nullpunkter i $x = -2$ og $x = 4$ og toppunkt midt mellom dem, i $x = 1$, der $f'(1) = -1 + 2 + 8 = 9$.

Skisse av f' : Tegn en nedovervendt parabel som - skjærer x -aksen i $(-2, 0)$ og $(4, 0)$, - har toppunkt $(1, 9)$, - skjærer y -aksen i $(0, 8)$.

f' er positiv (graf til f stiger) for $-2 < x < 4$ og negativ (graf til f synker) ellers — i samsvar med at f stiger mellom bunn- og toppunkt.

$$\boxed{f'(x) = -x^2 + 2x + 8}$$

Oppgave 12 (6 poeng)

Oppgave. To lineære funksjoner f og g har grafer som vist. f går gjennom $(0, 3)$ og $(2, -1)$; g går gjennom $(0, -2)$ og $(2, -1)$. a) Bestem $f(x)$ og $g(x)$. b) Bestem arealet av den grønne trekanten. c) Vis at trekanten er rettvinklet.

a) Linjen f går gjennom $(0, 3)$ og $(2, -1)$:

$$a_f = \frac{-1 - 3}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2, \quad f(x) = -2x + 3.$$

Linjen g går gjennom $(0, -2)$ og $(2, -1)$:

$$a_g = \frac{-1 - (-2)}{2 - 0} = \frac{1}{2}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 2.$$

$$\boxed{f(x) = -2x + 3, \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 2}$$

b) Den grønne trekanten har hjørner i skjæringspunktet $(2, -1)$ og i linjenes skjæringer med x -aksen. Nullpunkter:

$$f(x) = 0: -2x + 3 = 0 \implies x = \frac{3}{2}, \quad g(x) = 0: \frac{1}{2}x - 2 = 0 \implies x = 4.$$

Hjørnene er $(\frac{3}{2}, 0)$, $(4, 0)$ og $(2, -1)$. Grunnlinjen ligger på x -aksen med lengde

$$4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

og høyden er den loddrette avstanden fra $(2, -1)$ til x -aksen, altså 1. Arealet er

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4} = 1,25.$$

$$\boxed{A = \frac{5}{4}}$$

c) De to linjene møtes i $(2, -1)$. Stigningstallene er $a_f = -2$ og $a_g = \frac{1}{2}$. Produktet er

$$a_f \cdot a_g = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

Når produktet av stigningstallene til to linjer er -1 , står linjene vinkelrett på hverandre. Dermed er vinkelen i hjørnet $(2, -1)$ rett, og trekanten er rettvinklet. ■

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Oppgave. Salgsmodell $S(x) = 0,75x^3 - 59,5x^2 + 1200x$ for $x \in [0, 52]$ (antall par ski per uke, x uker etter salgsstart). a) Tegn grafen. b) Hvor mange uker selges mer enn 5000 par? c) Bestem momentan vekstfart i $x = 30$ og tolk den.

a) **Graf.** Tegn S i et digitalt verktøy (f.eks. GeoGebra) for $x \in [0, 52]$. Grafen starter i origo, stiger til en lokal topp ved omtrent $x \approx 13$ med ca. $S \approx 7100$ par, synker til en lokal bunn ved omtrent $x \approx 40$ med ca. $S \approx 800$ par, og stiger deretter bratt igjen mot slutten av perioden.

b) **Mer enn 5000 par.** Vi løser $S(x) = 5000$. Tre løsninger i intervallet:

$$x \approx 5,6, \quad x \approx 23,7, \quad x = 50.$$

(At $x = 50$ er en eksakt løsning ser vi ved innsetting: $S(50) = 0,75 \cdot 125000 - 59,5 \cdot 2500 + 60000 = 93750 - 148750 + 60000 = 5000$.)

$S(x) > 5000$ der grafen ligger over linjen $y = 5000$, altså på intervallene

$$5,6 < x < 23,7 \quad \text{og} \quad 50 < x \leq 52.$$

Siden oppgaven spør om hele uker med salg **mer enn** 5000 par, teller vi heltallene x med $S(x) > 5000$. Uke 50 er ikke med (der er $S = 5000$ nøyaktig, ikke mer). Det gir ukene

$$6, 7, 8, \dots, 23 \quad (18 \text{ uker}) \quad \text{og} \quad 51, 52 \quad (2 \text{ uker}),$$

til sammen $18 + 2 = 20$ uker.

$$\boxed{20 \text{ uker (uke 6–23 og uke 51–52)}}$$

c) **Momentan vekstfart i $x = 30$.** Vi deriverer:

$$S'(x) = 2,25x^2 - 119x + 1200.$$

$$S'(30) = 2,25 \cdot 900 - 119 \cdot 30 + 1200 = 2025 - 3570 + 1200 = -345.$$

$$S'(30) = -345$$

Tolkning. Etter 30 uker synker det ukentlige salget med ca. 345 par ski per uke (salget er på vei nedover på dette tidspunktet).

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. En fritidsklubb har 120 medlemmer. Volleyball 50, bordtennis 30, dataspill 60; parvis 20 (V B), 15 (V D), 10 (B D); alle tre 5. a) Fullfør venndiagrammet. b) Sannsynlighet for at et tilfeldig medlem ikke deltar på noen aktivitet.

a) **Venndiagram.** Vi fyller inn innenfra og ut. I midten (alle tre) står 5. De parvise feltene *uten* den tredje:

$$\underbrace{20 - 5}_{\text{kun V og B}} = 15, \quad \underbrace{15 - 5}_{\text{kun V og D}} = 10, \quad \underbrace{10 - 5}_{\text{kun B og D}} = 5.$$

De rene feltene (kun én aktivitet):

$$\text{kun V} = 50 - 15 - 10 - 5 = 20,$$

$$\text{kun B} = 30 - 15 - 5 - 5 = 5,$$

$$\text{kun D} = 60 - 10 - 5 - 5 = 40.$$

Felt	Antall
Kun volleyball	20
Kun bordtennis	5
Kun dataspill	40
Kun V og B	15
Kun V og D	10
Kun B og D	5
Alle tre	5

Antallet som deltar i minst én aktivitet:

$$20 + 5 + 40 + 15 + 10 + 5 + 5 = 100.$$

b) Ingen aktivitet. Av 120 medlemmer deltar 100 i minst én aktivitet, så $120 - 100 = 20$ deltar ikke i noen. Sannsynligheten er

$$P(\text{ingen}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%.$$

$$P(\text{ingen}) = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Oppgave. Firkant $ABCD$. I trekant ABD er $\angle DAB = 120^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$ og $AB = a$. Diagonalen BD deler firkanten; i trekant BCD er $\angle DBC = 75^\circ$ og $BC = \sqrt{2} \cdot a$. a) Vis at $BD = \sqrt{3} \cdot a$. b) Eksakt uttrykk for omkretsen. c) Bestem a slik at arealet blir $\sqrt{3}$.

a) Se på trekant ABD . Vinkelsummen gir den tredje vinkelen:

$$\angle ABD = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Siden BD ligger motstående $\angle A = 120^\circ$ og $AB = a$ ligger motstående $\angle ADB = 30^\circ$, gir sinussetningen

$$\frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \implies BD = a \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = a \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot a. \quad \blacksquare$$

b) **Omkrets.** Vi trenger alle fire sidene: $AB = a$, $BC = \sqrt{2}a$ og dessuten AD og DC .

I trekant ABD er $\angle ADB = \angle ABD = 30^\circ$, så trekanten er likebeint med $AD = AB = a$. (Sinussetningen bekrefter: $AD = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = a$.)

For DC ser vi på trekant BCD , der vi nå kjenner $BD = \sqrt{3}a$, $BC = \sqrt{2}a$ og den mellomliggende vinkelen $\angle DBC = 75^\circ$. Cosinussetningen gir

$$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos 75^\circ = 3a^2 + 2a^2 - 2\sqrt{6}a^2 \cos 75^\circ.$$

$$\text{Med } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}:$$

$$DC^2 = 5a^2 - 2\sqrt{6}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 5a^2 - \frac{a^2(12 - 2\sqrt{12})}{4} = 5a^2 - a^2(3 - \sqrt{3}) = a^2(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Siden } 2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}, \text{ blir}$$

$$DC = a\sqrt{2 + \sqrt{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}.$$

Omkretsen er

$$O = AB + BC + DC + DA = a + \sqrt{2}a + \frac{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2} + a = a \left(2 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right).$$

Vi samler $\sqrt{2}$ -leddene: $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, så

$$O = \frac{a(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$$

c) **Areal lik $\sqrt{3}$.** Firkanten deles av BD i to trekanter.

Trekant ABD (sider $AB = a$, $AD = a$, mellomliggende $\angle A = 120^\circ$):

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Trekant BCD (sider $BD = \sqrt{3}a$, $BC = \sqrt{2}a$, mellomliggende $\angle DBC = 75^\circ$):

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}a \cdot \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{a^2(6 + \sqrt{12})}{8} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{4}.$$

Samlet areal:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a^2(3 + 2\sqrt{3})}{4}.$$

Vi setter $A = \sqrt{3}$ og løser for a :

$$\frac{a^2(3 + 2\sqrt{3})}{4} = \sqrt{3} \implies a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Vi rasjonaliserer nevneren ved å gange med $2\sqrt{3} - 3$:

$$a^2 = \frac{4\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3} + 3)(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{4(6 - 3\sqrt{3})}{12 - 9} = \frac{24 - 12\sqrt{3}}{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$$

Siden $8 - 4\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$, er

$$a = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

$$a = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Hans deriverer $\frac{1}{x}$ med CAS og får $-\frac{1}{x^2}$. a) Vis at man får $-\frac{1}{x^2}$ ved å derivere x^{-1} som et ledd i et polynom (potensregelen). b) Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.

a) **Med potensregelen.** Potensregelen sier at $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$. Med $n = -1$:

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Altså gir samme regel som for polynomledd nettopp $-\frac{1}{x^2}$. ■

b) **Med definisjonen av den deriverte.** Den deriverte er

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Vi setter inn og setter brøkene i telleren på felles brøkstrek:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)}.$$

Vi forkorter h (for $h \neq 0$):

$$= \frac{-h}{h \cdot x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}.$$

Når $h \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}. \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Oppgave 5 (5 poeng)

Oppgave. $f(x) = \frac{1}{x}$ med tangent i punktet $(s, f(s))$. a) Vis at tangenten er $y = -\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s}$. b) Bestem skjæringspunktene A (x -aksen) og B (y -aksen) uttrykt ved s . c) Bestem arealet av $\triangle OAB$.

a) Den deriverte er $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (fra Oppgave 4), så stigningstallet i $x = s$ er $f'(s) = -\frac{1}{s^2}$. Tangenten gjennom punktet $(s, \frac{1}{s})$ er

$$y - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}(x - s).$$

Vi løser for y :

$$y = -\frac{1}{s^2}x + \frac{1}{s^2} \cdot s + \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}x + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s}. \quad \blacksquare$$

b) Skjæringspunkter.

A ligger på x -aksen ($y = 0$):

$$0 = -\frac{1}{s^2}x + \frac{2}{s} \implies \frac{1}{s^2}x = \frac{2}{s} \implies x = 2s, \quad A = (2s, 0).$$

B ligger på y -aksen ($x = 0$):

$$y = -\frac{1}{s^2} \cdot 0 + \frac{2}{s} = \frac{2}{s}, \quad B = \left(0, \frac{2}{s}\right).$$

$$\boxed{A = (2s, 0), \quad B = \left(0, \frac{2}{s}\right)}$$

c) Areal av $\triangle OAB$. Trekanten har rett vinkel i origo, med kateter langs aksene: $OA = 2s$ og $OB = \frac{2}{s}$. Da er

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot \frac{2}{s} = \frac{2s}{s} = 2.$$

Arealet er konstant lik 2 — uavhengig av hvor på grafen tangeringspunktet ligger.

$$\boxed{A_{\triangle OAB} = 2}$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.