Matematikk 1T — Høst 2022

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant har kateter 4 og 3 og hypotenus 5. Vinkelen u ligger ved den nederste høyre hjørnespissen (kateten 3 er hosliggende, kateten 4 er motstående). Vis at $\dfrac{\sin u}{\cos u} = \tan u$.

Løsning. Med utgangspunkt i den rettvinklede trekanten er

$$\sin u = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{4}{5}, \qquad \cos u = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{3}{5}, \qquad \tan u = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \frac{4}{3}.$$

Da blir

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = \tan u.$$

Mer generelt holder dette uansett trekant: hypotenusen h forkortes bort,

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\text{motstående}/h}{\text{hosliggende}/h} = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \tan u.$$

$$\boxed{\frac{\sin u}{\cos u} = \tan u \quad \checkmark}$$

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Gitt $f(x) = (x-4)(x-2)(x+4)$. a) Hvilken av tre oppgitte grafer (A, B, C) kan være grafen til f? Forklar. b) Løs ulikheten $(x-4)(x-2)(x+4) > 0$.

a) f er et tredjegradspolynom med positiv ledende koeffisient (når vi ganger ut, blir x^3-leddet $+x^3$). Da går grafen **fra nede til venstre og opp til høyre**. Nullpunktene er $x = -4$, $x = 2$ og $x = 4$.

Grafen må altså skjære x-aksen i nettopp disse tre punktene og gå oppover mot høyre. Det er grafen der venstre arm kommer nedenfra og høyre arm går oppover, med nullpunkter i -4, 2 og 4 — det vil si **graf A** (den eneste som både stiger mot høyre og har riktig plassering av nullpunktene, med to nullpunkter til høyre for y-aksen tett sammen ved 2 og 4).

b) Vi bruker fortegnsskjema for de tre faktorene. Nullpunktene $-4 < 2 < 4$ deler tallinjen i fire intervaller. Produktet av tre faktorer er positivt når null eller et partall av faktorene er negative:

Intervall	$x+4$	$x-2$	$x-4$	Produkt
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 4$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > 4$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ulikheten er oppfylt der produktet er positivt:

$$\boxed{x \in (-4,\, 2)\ \cup\ (4,\, \infty)}$$

Oppgave 3 (programmering)

Oppgave. Lars har skrevet et program som definerer $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$ og skriver ut x og $f(x)$ for $x = 8, 7, 6, \ldots, -8$. Programmet skriver ut seks linjer og gir så en feilmelding. a) Hva vil Lars bruke programmet til, og hvorfor får han feilmelding? b) Foreslå endringer som unngår feilmeldingen. c) Skisser grafen til f.

a) Programmet lager en **verditabell** for funksjonen $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$: for hver heltallsverdi av x fra 8 og nedover skrives x og funksjonsverdien $f(x)$ ut.

Feilmeldingen kommer fordi nevneren $x-2$ blir **null når** $x = 2$. Etter at x har gått $8, 7, 6, 5, 4, 3$ (seks linjer), blir neste verdi $x = 2$, og programmet forsøker å dele på null. Det gir en feilmelding (`ZeroDivisionError`).

b) Vi hopper over $x = 2$ med en `if`-test, slik at vi ikke deler på null. Programmet kan da fullføre hele utskriften:

Program (Python):

```
def f(x):
    return (1 - 2 * x) / (x - 2)

x = 8
while x >= -8:
    if x != 2:                  # hopper over x = 2
        print(x, f(x))
    x = x - 1
```

Program (C++):

```cpp
#include <iostream>
double f(double x) { return (1 - 2 * x) / (x - 2); }

int main() {
    for (int x = 8; x >= -8; --x) {
        if (x != 2)                         // hopper over x = 2
            std::cout << x << " " << f(x) << "\n";
    }
    return 0;
}
```

Begge gir samme tabell, nå uten feilmelding (utdrag av utskriften):

```
8 -2.5
7 -2.6
6 -2.75
5 -3.0
4 -3.5
3 -5.0
1 1.0
0 -0.5
-1 -1.0
 ...
-8 -1.7
```

c) Vi skriver om uttrykket ved polynomdivisjon:

$$f(x) = \frac{1-2x}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = -2 - \frac{3}{x-2}.$$

Dette viser at f er en hyperbel med

- **vertikal asymptote** $x = 2$ (der nevneren er null),
- **horisontal asymptote** $y = -2$ (verdien f nærmer seg når $|x|$ blir stor),
- **x-skjæring** der $1 - 2x = 0$, altså $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,
- **y-skjæring** $f(0) = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$, altså $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

For $x > 2$ ligger grafen under asymptoten $y = -2$ (f.eks. $f(8) = -2{,}5$), for $x < 2$ ligger den over (f.eks. $f(-8) = -1{,}7$). Skissen er en hyperbel med disse to asymptotene.

$$\boxed{f(x) = -2 - \frac{3}{x-2} \quad \text{— hyperbel med asymptotene } x = 2 \text{ og } y = -2.}$$

Oppgave 4 (3 poeng)

Oppgave. f er en andregradsfunksjon. Tangenten i punktet $(-2, 0)$ har likning $y = 9x + 18$, og tangenten i $(8, -10)$ har likning $y = -11x + 78$. Bestem $f'(x)$.

Løsning. Den deriverte i et punkt er lik **stigningstallet** til tangenten i punktet. Fra tangentlikningene leser vi av stigningstallene:

$$f'(-2) = 9, \qquad f'(8) = -11.$$

For en andregradsfunksjon $f(x) = ax^2 + bx + c$ er $f'(x) = 2ax + b$, altså en **lineær** funksjon. Vi setter opp to likninger:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -4a + b = 9 \\ f'(8) &= 16a + b = -11 \end{aligned}$$

Trekker den øverste fra den nederste: $20a = -20 \Rightarrow a = -1$. Da gir $-4(-1) + b = 9 \Rightarrow b = 5$.

$$\boxed{f'(x) = -2x + 5}$$

(Kontroll: $f'(-2) = 4 + 5 = 9$ og $f'(8) = -16 + 5 = -11$. ✓)

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (basseng, 5 poeng)

Oppgave. Temperaturen i et hagebasseng modelleres med $T(x) = 3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87^x$ (°C), der x er antall timer etter at strømmen slås av ($x \geq 0$). a) Temperatur ved $x = 0$. b) Hvor lang tid før temperaturen er under 20 °C? c) Stigningstall for linjen gjennom $(0, T(0))$ og $(4, T(4))$, med tolkning. d) Vil temperaturen noen gang synke mer enn 5 °C på én time? e) Praktisk tolkning av tallet 3,5.

a) Ved $x = 0$:

$$T(0) = 3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87^0 = 3{,}5 + 34{,}5 = \boxed{38\,^\circ\mathrm{C}}.$$

b) Vi løser $T(x) = 20$:

$$3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87^x = 20 \implies 0{,}87^x = \frac{16{,}5}{34{,}5} \implies x = \frac{\ln(16{,}5/34{,}5)}{\ln 0{,}87} \approx 5{,}3.$$

Temperaturen passerer 20 °C etter ca. 5,3 timer. Siden $T(5) \approx 20{,}7\,^\circ\mathrm{C}$ og $T(6) \approx 18{,}5\,^\circ\mathrm{C}$, er temperaturen først under 20 °C **etter ca.** 5,3 **timer**.

$$\boxed{x \approx 5{,}3 \text{ timer}}$$

c) Stigningstallet mellom punktene $(0, T(0))$ og $(4, T(4))$:

$$T(4) = 3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87^4 \approx 23{,}26\,^\circ\mathrm{C}, \qquad a = \frac{T(4) - T(0)}{4 - 0} = \frac{23{,}26 - 38}{4} \approx -3{,}7.$$

$$\boxed{a \approx -3{,}7\ ^\circ\mathrm{C/time}}$$

Tolkning: I gjennomsnitt synker temperaturen med ca. 3,7 °C per time i løpet av de første fire timene etter at strømmen ble slått av.

d) Et eksponentielt fall er brattest helt i starten, så den største nedgangen på én time skjer i det første timesintervallet:

$$T(0) - T(1) = 38 - (3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87) = 38 - 33{,}515 \approx 4{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Siden den største nedgangen på én time er ca. $4{,}5\,^{\circ}\mathrm{C} < 5\,^{\circ}\mathrm{C}$, vil temperaturen **aldri** synke med mer enn 5 °C i løpet av én time.

$$\boxed{\text{Nei — største nedgang på én time er ca. } 4{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}.}$$

e) Når $x \to \infty$ går $0{,}87^x \to 0$, så $T(x) \to 3{,}5$. Tallet 3,5 er den **temperaturen vannet nærmer seg på lang sikt** — altså temperaturen i omgivelsene (rom-/lufttemperaturen rundt bassenget) som vannet til slutt blir avkjølt ned mot.

Oppgave 2 (bygård, 4 poeng)

Oppgave. En bygård har 40 leiligheter med til sammen 90 rom. Hver leilighet har enten to eller tre rom. Hvor mange har to rom, og hvor mange har tre rom?

Løsning. La x være antall leiligheter med to rom og y antall med tre rom. Da er

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \qquad \text{(antall leiligheter)} \\ 2x + 3y &= 90 \qquad \text{(antall rom)} \end{aligned}$$

Fra den første: $x = 40 - y$. Settes inn i den andre:

$$2(40 - y) + 3y = 90 \implies 80 + y = 90 \implies y = 10, \quad x = 30.$$

$$\boxed{\text{30 leiligheter med to rom og 10 leiligheter med tre rom.}}$$

(Kontroll: $30 + 10 = 40$ *leiligheter og* $2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 = 60 + 30 = 90$ *rom.* ✓*)*

Oppgave 3 (sirkel, 5 poeng)

Oppgave. En sirkel har sentrum S. AB er diameter, og C ligger på sirkelperiferien. Vinkelen ved S i trekant SBC (mellom SB og SC) er 45°, og arealet av $\triangle SBC$ er $3\sqrt{2}$. a) Bestem radien (eksakt). b) Bestem arealet av $\triangle ABC$ (eksakt).

a) Både SB og SC er radier, så $SB = SC = r$. Arealet av $\triangle SBC$ med to sider r og mellomliggende vinkel 45°:

$$A_{SBC} = \frac{1}{2}\, r \cdot r \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}.$$

Sett dette lik $3\sqrt{2}$:

$$\frac{r^2\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2} \implies r^2 = 12 \implies r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{r = 2\sqrt{3}}$$

b) Siden AB er diameter, ligger C på en **Thales-sirkel**, så $\angle ACB = 90^\circ$ (periferivinkel over diameter). Trekant ABC kan deles i $\triangle ASC$ og $\triangle BSC$. Vinkelen $\angle BSC = 45^\circ$, og siden A, S, B er på en rett linje, er $\angle ASC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Begge deltrekantene har to sider lik r:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}r^2 \sin 135^\circ + \frac{1}{2}r^2 \sin 45^\circ = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{2}.$$

Med $r^2 = 12$:

$$A_{ABC} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\boxed{A_{\triangle ABC} = 6\sqrt{2}}$$

(Alternativt: grunnlinjen $AB = 2r$ og høyden fra C er $r \sin 45^\circ$, som gir $A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r \sin 45^\circ = r^2 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$. ✓)

Oppgave 4 (cosinussetning, 6 poeng)

Oppgave. Nina og Edvard skal finne en ukjent side x i en trekant og har satt opp $14^2 = 16^2 + x^2 - 16x$ med cosinussetningen. a) Hvilke opplysninger kan de ha fått om trekanten? b) Løs likningen, og lag en skisse som viser at det kan være to ulike trekanter. c) Hvilket tall må 14^2 erstattes med for at det blir nøyaktig én løsning? Bestem da sidene (eksakt).

a) Cosinussetningen lyder $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Vi sammenligner med

$$14^2 = 16^2 + x^2 - 16x = 16^2 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \cos A.$$

Da må $2 \cdot 16 \cdot \cos A = 16$, altså $\cos A = \frac{1}{2}$, som gir $A = 60^\circ$.

Opplysningene kan være: En trekant der den ene siden er 16, en annen side er ukjent (x), og siden **motstående** den ukjente sidens og 16-sidens mellomliggende vinkel på 60° er 14. Kort sagt: to sider er 14 og 16, og vinkelen på 60° ligger mellom 16-siden og den ukjente siden x (siden 14 er motstående 60°-vinkelen).

b) Vi ordner likningen:

$$14^2 = 16^2 + x^2 - 16x \implies x^2 - 16x + (256 - 196) = 0 \implies x^2 - 16x + 60 = 0.$$

abc-formelen:

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256-240}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = 10 \text{ eller } 6.$$

$$\boxed{x = 6 \quad \text{eller} \quad x = 10}$$

Skisse / to trekanter: Tegn en linje fra punktet der 60°-vinkelen ligger; den ene kjente siden er 16. Fra det andre endepunktet av 16-siden slår vi en sirkelbue med radius 14 (den motstående siden). Buen treffer den frie strålen i **to punkter**, og avstanden fra vinkeltoppen til disse to punktene er nettopp $x = 6$ og $x = 10$. Dermed finnes det to trekanter:

- Trekant 1: sider 16, 14 og $x = 6$, med 60° mellom 16 og 6.
- Trekant 2: sider 16, 14 og $x = 10$, med 60° mellom 16 og 10.

c) Andregradslikningen $x^2 - 16x + (256 - k) = 0$ (der k er tallet som erstatter 14^2) har **nøyaktig én løsning** når diskriminanten er null:

$$16^2 - 4(256 - k) = 0 \implies 256 - 1024 + 4k = 0 \implies k = 192.$$

Vi må altså erstatte 14^2 med 192, det vil si bruke siden $\sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ i stedet for 14. Da blir den ene løsningen

$$x = \frac{16}{2} = 8.$$

Geometrisk betyr dette at sirkelbuen **tangerer** den frie strålen — det blir bare én trekant, og den er **rettvinklet** (siden $\sqrt{192}$ er motstående 60° og treffer i ett punkt). Sidene blir:

$$\boxed{\text{Sider } 8,\ 16 \text{ og } 8\sqrt{3},\ \text{med } 60^\circ \text{ mellom } 8 \text{ og } 16.}$$

(Kontroll med cosinussetningen: $8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos 60^\circ = 64 + 256 - 128 = 192 = (8\sqrt{3})^2$. ✓ *Vinkelen mot* 16 *er* 90°*, så trekanten er rettvinklet.)*

Oppgave 5 (pendel, 5 poeng)

Oppgave. En tabell gir svingetiden (sekund) for en pendel med åtte ulike snorlengder x (meter). a) Lag en modell på formen $S(x) = a \cdot x^b$. b) Sammenlign med formelen $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ der $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

a) Med potensregresjon (CAS/regneark) på de åtte datapunktene får vi

$$\boxed{S(x) \approx 2{,}03 \cdot x^{0{,}47}}.$$

(Eksponenten ligger nær 0,5 og koeffisienten nær 2.)

b) Vi skriver om formelen for svingetiden:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot L^{1/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}} \cdot L^{0{,}5} \approx 2{,}01 \cdot L^{0{,}5}.$$

Sammenligner vi med $S(x) \approx 2{,}03 \cdot x^{0{,}47}$:

- Koeffisienten $a \approx 2{,}03$ stemmer godt med $\dfrac{2\pi}{\sqrt{9{,}81}} \approx 2{,}01$.
- Eksponenten $b \approx 0{,}47$ stemmer godt med teoriverdien 0,5.

$$\boxed{\text{Modellen } S(x) \approx 2{,}03x^{0{,}47} \text{ stemmer godt med formelen } T = 2\pi\sqrt{L/g} \approx 2{,}01\,L^{0{,}5}.}$$

Forskjellen skyldes måleusikkerhet, friksjon og luftmotstand som modellen i a) ikke ser bort fra. Begge gir at svingetiden er tilnærmet proporsjonal med kvadratroten av snorlengden, $S(x) \approx 2\sqrt{x}$.

Oppgave 6 (gjerde, 5 poeng)

Oppgave. Per og Solveig har gjerde til et rektangel med omkrets 64 m og vil ha størst mulig areal. Per påstår at arealet blir størst når alle sidene er like lange. a) Lag en oversikt (tabell) som viser arealet for ulike rektangler med omkrets 64 m. b) Sett opp et funksjonsuttrykk, tegn grafen og vis at Per har rett.

a) Med omkrets 64 m er summen av to nabosider 32 m. Er den ene siden x, er den andre $32 - x$, og arealet er $x(32 - x)$:

x (m)	$32 - x$ (m)	Areal $x(32 - x)$ (m^2)
4	28	112
8	24	192
12	20	240
14	18	252
16	16	**256**
18	14	252
24	8	192

Tabellen viser at arealet er størst (256 m^2) når $x = 16$, altså når begge sidene er 16 m — et **kvadrat**, slik Per påstår.

b) Solveig kan bruke arealfunksjonen

$$A(x) = x(32 - x) = -x^2 + 32x, \qquad 0 < x < 32.$$

Dette er en parabel som vender ned, med toppunkt der

$$A'(x) = -2x + 32 = 0 \implies x = 16.$$

Toppunktet er $(16,\ A(16)) = (16,\ 256)$. Grafen er en nedovervendt parabel med nullpunkter i $x = 0$ og $x = 32$ og maksimum i $x = 16$. Maksimalt areal får vi når $x = 32 - x = 16$, altså når rektangelet er et **kvadrat med side** 16 **m**.

$$\boxed{A(x) = -x^2 + 32x; \quad \text{størst areal } 256 \text{ m}^2 \text{ ved kvadrat med side 16 m — Per har rett.}}$$

Oppgave 7 (gardiner, 5 poeng)

Oppgave. Hvert gardin har form som en parabel: høyde 70 cm, lengde øverst 150 cm. Gardinene klippes ut fra en 140 cm bred tøyrull. For å spare stoff klippes gardinene nestet (annenhver opp/ned), slik figuren viser; nestelinjen ligger 35 cm ned. Finn hvor langt tøystykke som trengs for 8 gardiner.

Oppsett. Vi legger origo i øvre venstre hjørne av et gardin og lar y peke nedover. Et gardin har topp langs $y = 0$ (bredde 150, fra $x = 0$ til $x = 150$) og bunnpunkt (parabeltopp) i (75, 70). Parabelen blir

$$f(x) = a(x-75)^2 - 70, \qquad f(0) = 0 \;\Rightarrow\; a \cdot 75^2 = 70 \;\Rightarrow\; a = \frac{70}{5625} = \frac{14}{1125}.$$

Nestingen. Tøyrullen er $140 = 2 \cdot 70$ cm bred. Annethvert gardin snus opp-ned, og de skyves inn i hverandre slik at de møtes langs linja 35 cm ned (halve høyden). Vi finner hvor parabelen er 35 cm ned, altså $f(x) = -35$:

$$a(x-75)^2 - 70 = -35 \implies (x-75)^2 = \frac{35}{a} = \frac{35 \cdot 1125}{14} = 2812{,}5 \implies x = 75 \pm \frac{75}{\sqrt{2}}.$$

Møtepunktene ligger altså i $x \approx 21{,}97$ cm og $x \approx 128{,}03$ cm — det vil si $75/\sqrt{2} \approx 53{,}03$ cm på hver side av bunnpunktet.

Lengden. Når gardinene nestes, "låner" hvert gardin plass av nabogardinet. På nestelinja 35 cm ned er hvert gardin $2 \cdot \frac{75}{\sqrt{2}} = 75\sqrt{2} \approx 106{,}07$ cm bredt, og hvert gardin flytter raden framover med sin halve bredde der, $\frac{75}{\sqrt{2}}$. De ytterste hjørnene stikker ut med $(75 - \frac{75}{\sqrt{2}})$ i hver ende. Samlet lengde for 8 gardiner:

$$L = 8 \cdot \frac{75}{\sqrt{2}} + 2\left(75 - \frac{75}{\sqrt{2}}\right) = 6 \cdot \frac{75}{\sqrt{2}} + 150 = 150 + 225\sqrt{2} \approx 468{,}2 \text{ cm}.$$

$$\boxed{L = 150 + 225\sqrt{2} \approx 468{,}2 \text{ cm} \approx 4{,}68 \text{ m}}$$

Bedriften må altså bruke et tøystykke på ca. **468,2** cm for å lage åtte gardiner.
