

Matematikk 1T — Høst 2023

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

Vekting: Hver deloppgave teller likt, med unntak av **oppgave 2 og 3 i Del 1** og **oppgave 2, 3b og 6 i Del 2**, som teller **1,5 ganger** så mye som de andre deloppgavene.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave. En likesidet trekant har sidelengder 2 (se figur). Bruk trekanten til å vise at $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Løsning. I en likesidet trekant er alle vinklene 60° . Vi trekker høyden fra toppunktet ned på grunnlinjen. Høyden står vinkelrett på grunnlinjen og **halverer** både toppvinkelen og grunnlinjen, fordi trekanten er symmetrisk.

Da får vi en rettvinklet trekant med

- hypotenus = 2 (en av sidene i den likesidete trekanten),
- den nederste vinkelen ved grunnlinjen er fortsatt 60° ,
- kateten **hosliggende** 60° er den halve grunnlinjen = $\frac{2}{2} = 1$.

Cosinus til en vinkel i en rettvinklet trekant er hosliggende katet delt på hypotenus:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

Oppgave 2 (teller 1,5×)

Oppgave. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. I hvilke punkter skjærer grafen x -aksen?

Løsning. Grafen skjærer x -aksen der $f(x) = 0$. Vi prøver heltallsdelere av konstantleddet -6 (altså $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$). Test $x = 2$:

$$f(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0,$$

så $x = 2$ er en rot, og $(x - 2)$ er en faktor. Polynomdivisjon $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2)$ gir

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3) = (x - 2)(x + 1)(x + 3).$$

Nullpunktene er dermed $x = 2$, $x = -1$ og $x = -3$. Siden $f(0) = -6$, skjærer grafen x -aksen i tre punkter:

$$\boxed{(-3, 0), \quad (-1, 0) \quad \text{og} \quad (2, 0)}$$

Oppgave 3 (teller 1,5×)

Oppgave. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$. Bestem likningen for tangenten til grafen i punktet $(1, f(1))$.

Løsning. Vi trenger $f(1)$ (røringspunktet) og $f'(1)$ (stigningstallet).

$$f(1) = 1 - 3 - 1 + 4 = 1,$$

så røringspunktet er $(1, 1)$. Deriverer vi:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \implies f'(1) = 3 - 6 - 1 = -4.$$

Tangenten har stigningstall -4 og går gjennom $(1, 1)$. Ettpunktsformelen $y - y_1 = a(x - x_1)$ gir

$$y - 1 = -4(x - 1) \implies y = -4x + 5.$$

$$\boxed{y = -4x + 5}$$

Oppgave 4

Oppgave. To trekanter har begge to sider på 6. Den ene har mellomliggende vinkel 150° , den andre har vinkel 32° . Hvilken har størst areal? Begrunn.

Løsning. Arealet av en trekant der vi kjenner to sider og den mellomliggende vinkelen er

$$A = \frac{1}{2} a b \sin V.$$

Begge trekantene har $a = b = 6$, så arealet bestemmes bare av $\sin V$. Vi sammenligner $\sin 150^\circ$ og $\sin 32^\circ$.

Husk at $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Vinkelen 32° ligger mellom 0° og 30° ... nei — 32° er litt **større** enn 30° . På intervallet 0° til 90° er sinus voksende, så

$$\sin 32^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ.$$

Dermed er $\sin 32^\circ > \sin 150^\circ$, og trekanten med vinkelen 32° har størst areal.

Kontroll: $A_{150^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$, mens $A_{32^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 32^\circ \approx 18 \cdot 0,530 \approx 9,5$.

Trekanten med vinkel 32° har størst areal.

Oppgave 5

Oppgave. $f(x) = \frac{2x-8}{x+2}$ og $g(x) = \frac{x^2-4}{(x-3)(x+3)}$. Av seks grafer A–F: a) hvilken er grafen til f ?

b) hvilken er grafen til g ? Begrunn.

a) **Grafen til f .** Vi finner kjennetegnene til $f(x) = \frac{2x-8}{x+2}$:

- **Vertikal asymptote:** nevneren er null for $x = -2$ (én vertikal asymptote, til venstre for y -aksen).
- **Horisontal asymptote:** teller og nevner har samme grad, og forholdet mellom ledende koeffisienter er $\frac{2}{1} = 2$. Altså $y = 2$ (over x -aksen). Vi kan også skrive $f(x) = 2 - \frac{12}{x+2}$.
- **Nullpunkt:** $2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$.
- **Skjæring med y -aksen:** $f(0) = \frac{-8}{2} = -4$.

Vi leter etter en graf med **én** vertikal asymptote til venstre for y -aksen og en **positiv** horisontal asymptote $y = 2$, som går gjennom $(0, -4)$ og krysser x -aksen i $x = 4$. Dette passer med graf **C** (A og B har horisontal asymptote *under* x -aksen).

f er graf C

b) **Grafen til g .** Vi forenkler og finner kjennetegnene:

$$g(x) = \frac{x^2-4}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}.$$

- **Vertikale asymptoter:** $x = 3$ og $x = -3$ (to asymptoter, symmetrisk om y -aksen).
- **Horisontal asymptote:** samme grad i teller og nevner, ledende koeffisienter $\frac{1}{1} = 1$, altså $y = 1$ (over x -aksen).
- **Nullpunkter:** $x = 2$ og $x = -2$.
- **Skjæring med y -aksen:** $g(0) = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9} \approx 0,44$ (positiv).

g er en **like** funksjon (symmetrisk om y -aksen). Vi leter etter en graf med to symmetriske vertikale asymptoter $x = \pm 3$, horisontal asymptote $y = 1$ over x -aksen, en midtbue som toppe *over* x -aksen i $(0; 0,44)$ og krysser x -aksen i ± 2 . Dette passer med graf **F**.

g er graf F

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave. Folketallsmodell $F(x) = \frac{1}{1000} (0,027x^3 - 5,8x^2 + 220x + 7900)$ (i tusen innbyggere), x år etter 1960, $x \in [0, 80]$. a) Vis på to ulike måter når folketallet var høyest. b) Stigningstallet til linjen gjennom $(30, F(30))$ og $(70, F(70))$, med tolkning. c) Når minker folketallet raskest?

a) Når var folketallet høyest? (to metoder)

Metode 1 — graftegner. Tegn F i et digitalt verktøy på $[0, 80]$ og bruk «maksimum / toppunkt»-funksjonen. Verktøyet gir et toppunkt ved $x \approx 22,5$ med $F \approx 10,2$.

Metode 2 — derivasjon (CAS). Folketallet er størst der $F'(x) = 0$:

$$F'(x) = \frac{1}{1000} (0,081x^2 - 11,6x + 220) = 0.$$

Abc-formelen gir $x \approx 22,5$ og $x \approx 120,7$. Bare $x \approx 22,5$ ligger i $[0, 80]$. Sjekk endepunktene: $F(0) = 7,9$, $F(80) = 2,2$, mens $F(22,5) \approx 10,2$. Toppen er altså inne i intervallet.

Folketallet var høyest $x \approx 22,5$ år etter 1960 (i 1982), med ca. 10 200 innbyggere.

b) Stigningstallet (gjennomsnittlig vekstfart). Linjen gjennom $(30, F(30))$ og $(70, F(70))$:

$$F(30) \approx 10,009, \quad F(70) \approx 4,141.$$

$$a = \frac{F(70) - F(30)}{70 - 30} = \frac{4,141 - 10,009}{40} \approx -0,147.$$

$$a \approx -0,147$$

Tolkning: I gjennomsnitt **sank** folketallet med ca. 0,147 tusen = 147 innbyggere per år i perioden fra 30 til 70 år etter 1960 (altså 1990–2030 ifølge modellen).

c) Når minker folketallet raskest? Folketallet minker raskest der vekstfarten $F'(x)$ er minst (mest negativ), altså der $F''(x) = 0$ (vendepunktet):

$$F''(x) = \frac{1}{1000} (0,162x - 11,6) = 0 \implies x = \frac{11,6}{0,162} \approx 71,6.$$

Folketallet minker raskest ca. $x \approx 71,6$ år etter 1960 (i 2031).

Oppgave 2 (teller 1,5×)

Oppgave. Firkanten $ABCD$ er delt av diagonalen $DB = 12$ i to trekanter. I trekant ABD er $\angle DAB = 125^\circ$ og $\angle DBA = 35^\circ$. I trekant BCD er $DC = 8$, $CB = 6$ og $DB = 12$. Bestem arealet av firkanten med trigonometri, og gjør rede for sammenhengene du bruker.

Løsning. Vi deler firkanten langs diagonalen DB og finner arealet av hver trekant for seg.

Trekant ABD (vinkelsummen og arealsetningen). Vinkelsummen i en trekant er 180° , så

$$\angle ADB = 180^\circ - 125^\circ - 35^\circ = 20^\circ.$$

Vi kjenner siden $DB = 12$ og de to vinklene den ligger mellom ($\angle DBA = 35^\circ$ ved B og $\angle ADB = 20^\circ$ ved D). Med **sinussetningen** finner vi de to andre sidene:

$$\frac{AD}{\sin(\angle DBA)} = \frac{AB}{\sin(\angle ADB)} = \frac{DB}{\sin(\angle DAB)}.$$

$$AD = \frac{12 \sin 35^\circ}{\sin 125^\circ} \approx 8,40, \quad AB = \frac{12 \sin 20^\circ}{\sin 125^\circ} \approx 5,01.$$

Arealet med **arealsetningen** (to sider og mellomliggende vinkel $\angle DAB = 125^\circ$):

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin(\angle DAB) \approx \frac{1}{2} \cdot 5,01 \cdot 8,40 \cdot \sin 125^\circ \approx 17,24.$$

Trekant BCD (cosinussetningen + arealsetningen). Her kjenner vi alle tre sidene $DC = 8$, $CB = 6$, $DB = 12$. Vi finner vinkelen $\angle BCD$ med **cosinussetningen**:

$$DB^2 = DC^2 + CB^2 - 2 \cdot DC \cdot CB \cdot \cos(\angle BCD)$$

$$12^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(\angle BCD) \implies \cos(\angle BCD) = \frac{64 + 36 - 144}{96} = -\frac{44}{96} = -0,4583,$$

så $\angle BCD \approx 117,3^\circ$. Arealet med **arealsetningen**:

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot CB \cdot \sin(\angle BCD) \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 117,3^\circ \approx 21,33.$$

Samlet areal av firkanten:

$$A = A_{ABD} + A_{BCD} \approx 17,24 + 21,33 = 38,57.$$

$$\boxed{A \approx 38,6}$$

Oppgave 3

Oppgave. Linjestykker settes sammen til en figur. Hvert linjestykke er 90% av det forrige; det første er 100 cm. a) Sum av lengdene av de 8 første. b) Program som regner ut summen av n linjestykker; hvor mange trengs for at summen blir minst 9 meter? c) Hvor mange prosent øker summen når antallet økes fra 50 til 100?

Mønster. Lengdene er en **geometrisk rekke** med $a_1 = 100$ cm og kvotient $k = 0,9$. Summen av de n første:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} = 100 \cdot \frac{1 - 0,9^n}{1 - 0,9} = 1000(1 - 0,9^n).$$

a) Med $n = 8$:

$$S_8 = 1000(1 - 0,9^8) = 1000(1 - 0,43047) \approx 569,5 \text{ cm.}$$

$$S_8 \approx 569,5 \text{ cm} \approx 5,7 \text{ m}$$

b) 9 meter = 900 cm. Vi løser $S_n \geq 900$, dvs. $1000(1 - 0,9^n) \geq 900 \Rightarrow 0,9^n \leq 0,1$. Programmet under summerer til summen passerer 900 cm.

```
def sum_lengder(n):
    s, ledd = 0.0, 100.0          # første linjestykke er 100 cm
    for _ in range(n):
        s += ledd
        ledd *= 0.9              # neste er 90 % av forrige
    return s

# Hvor mange trengs for minst 9 meter (900 cm)?
n = 0
s = 0.0
ledd = 100.0
while s < 900:
    s += ledd
    ledd *= 0.9
    n += 1
print(n, round(s, 1))          # 22 901.5

#include <iostream>
#include <cmath>
int main() {
    double s = 0.0, ledd = 100.0; // første linjestykke 100 cm
    int n = 0;
    while (s < 900) {
        s += ledd;
        ledd *= 0.9;             // 90 % av forrige
        ++n;
    }
```

```

}
std::cout << n << " " << s << "\n"; // 22 901.523
return 0;
}

```

Programmet gir $n = 22$ (med $S_{22} \approx 901,5$ cm). $S_{21} \approx 890,6$ cm er ikke nok.

Vi må ha med 22 linjestykker.

c) Vi sammenligner S_{100} og S_{50} :

$$S_{50} = 1000(1 - 0,9^{50}) \approx 994,85, \quad S_{100} = 1000(1 - 0,9^{100}) \approx 999,97.$$

Prosentvis økning:

$$\frac{S_{100} - S_{50}}{S_{50}} \cdot 100\% = \frac{999,97 - 994,85}{994,85} \cdot 100\% \approx 0,51\%.$$

Økningen er ca. 0,5%.

Kommentar: Summen nærmer seg grenseverdien $\frac{a_1}{1 - k} = \frac{100}{0,1} = 1000$ cm = 10 m, så å doble antallet fra 50 til 100 gir nesten ingen tilvekst.

Oppgave 4

Oppgave. Tabell over antall fiskere i Norge (hovedyrke) i 1952–2022. La x = år etter 1950. a) Lag en modell F . b) Hvor mange i 2050 ifølge modellen? Vurder gyldighetsområdet.

År	1952	1982	1992	2002	2012	2022
x	2	32	42	52	62	72
Fiskere	65 956	25 289	19 780	13 841	9 825	9 591

a) Modell. Tallene faller raskt i starten og flater ut — det er typisk for **eksponentiell** nedgang. Vi gjør en eksponentiell regresjon (regneark/CAS) på formen $F(x) = a \cdot b^x$ og får

$$a \approx 66\,360, \quad b \approx 0,9714.$$

$$F(x) \approx 66\,360 \cdot 0,9714^x$$

Modellen sier at antallet fiskere synker med ca. 2,9% per år.

b) Antall i 2050. År 2050 svarer til $x = 100$:

$$F(100) \approx 66\,360 \cdot 0,9714^{100} \approx 3\,658.$$

Ca. 3 658 fiskere i 2050 ifølge modellen.

Vurdering av gyldighetsområdet: Dataene dekker $x \in [2, 72]$. En prediksjon for $x = 100$ ligger langt **utenfor** dette området (ekstrapolasjon), så svaret er usikkert. Modellen passer dessuten dårligst i den siste delen: de to siste målingene (2012 og 2022) er omtrent like store, mens en ren eksponentiellmodell fortsetter å synke mot null. I virkeligheten ser nedgangen ut til å flate ut, så modellen vil trolig **undervurdere** antallet i 2050. Tallet 3 700 bør tolkes med stor forsiktighet.

Oppgave 5

Oppgave. $f(x) = 2x + 8$ og $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 8$. Linjen $x = 1$ skjærer f i P og g i Q . a) Bestem avstanden PQ . b) For en ny linje $x = a$ med $a \in \langle 1, 3 \rangle$ kalles skjæringen med f for R og med g for S . Bestem a slik at RS blir størst mulig. Skriv svaret eksakt.

a) **Avstanden PQ .** Begge punktene har $x = 1$, så avstanden er forskjellen i y -verdi:

$$P = (1, f(1)) = (1, 2 + 8) = (1, 10),$$
$$Q = (1, g(1)) = (1, 1 - 1 - 4 + 8) = (1, 4).$$

$$PQ = |10 - 4| = 6.$$

$PQ = 6$

b) **Største avstand RS .** På linjen $x = a$ er $R = (a, f(a))$ og $S = (a, g(a))$. Av figuren ligger linjen f over g i intervallet, så avstanden er

$$h(a) = f(a) - g(a) = (2a + 8) - (a^3 - a^2 - 4a + 8) = -a^3 + a^2 + 6a.$$

Vi maksimerer h på $\langle 1, 3 \rangle$ ved å derivere:

$$h'(a) = -3a^2 + 2a + 6 = 0 \implies 3a^2 - 2a - 6 = 0.$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Bare $a = \frac{1 + \sqrt{19}}{3} \approx 1,79$ ligger i $\langle 1, 3 \rangle$. Siden h' skifter fra positiv til negativ her, er det et maksimum.

$a = \frac{1 + \sqrt{19}}{3}$

(Den største avstanden blir da $RS = h(a) \approx 8,2$.)

Oppgave 6 (teller 1,5×)

Oppgave. Tredjegradsfunksjon $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 64$. Punktet $(-8, 0)$ er et toppunkt, og den gjennomsnittlige vekstfarten i $[0, 5]$ er $\frac{64}{5}$. Bestem a , b og c .

Løsning. Vi setter opp tre likninger fra de tre opplysningene.

(1) $(-8, 0)$ ligger på grafen: $f(-8) = 0$:

$$a(-8)^3 + b(-8)^2 + c(-8) - 64 = 0 \implies -512a + 64b - 8c - 64 = 0.$$

(2) $(-8, 0)$ er et toppunkt $\implies f'(-8) = 0$. Med $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

$$3a(-8)^2 + 2b(-8) + c = 0 \implies 192a - 16b + c = 0.$$

(3) Gjennomsnittlig vekstfart i $[0, 5]$ er $\frac{64}{5}$:

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{64}{5}.$$

Her er $f(0) = -64$, og $f(5) = 125a + 25b + 5c - 64$, så $f(5) - f(0) = 125a + 25b + 5c$. Da blir

$$\frac{125a + 25b + 5c}{5} = \frac{64}{5} \implies 125a + 25b + 5c = 64.$$

Løser vi de tre likningene (CAS) får vi

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{11}{5}, \quad c = -\frac{16}{5}.$$

$$\boxed{a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{11}{5}, \quad c = -\frac{16}{5}}$$

Kontroll: $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{11}{5}x^2 - \frac{16}{5}x - 64$ gir $f(-8) = 0$ og $f''(-8) = -\frac{26}{5} < 0$, så $(-8, 0)$ er virkelig et toppunkt. ✓

Oppgave 7

Oppgave. $f(x) = \frac{8}{x^2 + 20}$. Et rektangel har hjørner i $(0, 0)$, $(k, 0)$, $(k, f(k))$ og $(0, f(k))$. a) Areal når $k = 5$. b) Lag en systematisk oversikt over arealene for $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. c) Bestem k slik at arealet blir størst mulig.

a) **Areal når $k = 5$.** Rektangelet har bredde k og høyde $f(k)$, så arealet er $A(k) = k \cdot f(k)$. Med $k = 5$:

$$f(5) = \frac{8}{5^2 + 20} = \frac{8}{45}, \quad A(5) = 5 \cdot \frac{8}{45} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9} \approx 0,89.$$

$$\boxed{A(5) = \frac{8}{9} \approx 0,89}$$

b) Systematisk oversikt for $n = 1, \dots, 10$. Arealet er $A(n) = \frac{8n}{n^2 + 20}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(n)$	0,381	0,667	0,828	0,889	0,889	0,857	0,812	0,762	0,713	0,667

Vi ser at arealet er størst for $n = 4$ og $n = 5$ (begge gir nøyaktig $\frac{8}{9} \approx 0,889$), og avtar igjen for større n .

```
def areal(n):
    return n * 8 / (n**2 + 20)

for n in range(1, 11):
    print(n, round(areal(n), 3))
# 1 0.381 | 2 0.667 | 3 0.828 | 4 0.889 | 5 0.889
# 6 0.857 | 7 0.812 | 8 0.762 | 9 0.713 | 10 0.667

#include <iostream>
#include <iomanip>
int main() {
    for (int n = 1; n <= 10; ++n) {
        double A = n * 8.0 / (n * n + 20);
        std::cout << n << " " << std::fixed << std::setprecision(3) << A << "\n";
    }
    // 4 0.889 og 5 0.889 er størst
    return 0;
}
```

c) Største areal (eksakt). Vi maksimerer $A(k) = \frac{8k}{k^2 + 20}$ for $k > 0$. Deriverer med brøkregelen:

$$A'(k) = \frac{8(k^2 + 20) - 8k \cdot 2k}{(k^2 + 20)^2} = \frac{8(20 - k^2)}{(k^2 + 20)^2}.$$

$A'(k) = 0$ når $20 - k^2 = 0$, altså $k^2 = 20 \Rightarrow k = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (positiv verdi). A' skifter fra positiv til negativ her, så det er et maksimum.

$$k = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

$$\text{Største areal blir } A(2\sqrt{5}) = \frac{8 \cdot 2\sqrt{5}}{20 + 20} = \frac{16\sqrt{5}}{40} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894.$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.