Matematikk 1T — Høst 2024

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Snorre har funnet formelen $2\sin u \cos u = \sin(2u)$. Bruk den oppgitte rettvinklede trekanten (kateter 1 og $\sqrt{3}$, hypotenus 2, med 30° ved toppen og 60° nederst) til å vise at formelen stemmer for $u = 30°$.

Løsning. Av trekanten leser vi av forholdene. Vinkelen 30° ligger ved toppen; den motstående kateten er grunnlinjen 1, og den hosliggende kateten er $\sqrt{3}$. Hypotenusen er 2. Dermed

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Venstresiden av formelen for $u = 30°$ blir

$$2\sin 30° \cos 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Høyresiden er $\sin(2 \cdot 30°) = \sin 60°$. Av samme trekant er $\sin 60°$ lik motstående katet ($\sqrt{3}$) delt på hypotenus (2):

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Venstre- og høyresiden er like, så

$$\boxed{2\sin 30° \cos 30° = \sin 60° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. $f(x) = (x-1)(x+3)$. Bestem koordinatene til bunnpunktet på grafen.

Løsning. Nullpunktene er $x = 1$ og $x = -3$. Parabelen er symmetrisk om midten av nullpunktene, så bunnpunktet har

$$x = \frac{1 + (-3)}{2} = -1.$$

Da er

$$f(-1) = (-1-1)(-1+3) = (-2)(2) = -4.$$

$$\boxed{\text{Bunnpunkt } (-1, -4)}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$. Løs ulikheten $f(x) < 0$, og illustrer løsningen med en skisse.

Løsning. Vi finner først nullpunktene. Heltallsdelere av -12 prøves; $x = 1$ gir

$$1 + 7 + 4 - 12 = 0,$$

så $(x-1)$ er en faktor. Polynomdivisjon (eller utprøving) gir

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x-1)(x^2 + 8x + 12) = (x-1)(x+2)(x+6).$$

Nullpunktene er altså $x = -6$, $x = -2$, $x = 1$. Vi setter opp et fortegnsskjema for produktet $(x-1)(x+2)(x+6)$:

Intervall	$x < -6$	$-6 < x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$(x+6)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Ulikheten $f(x) < 0$ er oppfylt der produktet er negativt:

$$\boxed{x < -6 \quad \text{eller} \quad -2 < x < 1}$$

Skisse. Tredjegradsgrafen kommer nedenfra til venstre, skjærer x-aksen i $x = -6$, har en topp, faller og skjærer i $x = -2$, har en bunn, og stiger gjennom $x = 1$. Grafen ligger *under* x-aksen for $x < -6$ og for $-2 < x < 1$ — nettopp de markerte intervallene.

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. En sirkel har radius $r = 1$, og punktet $P(0{,}64,\ 0{,}77)$ ligger på sirkelen (svarende til vinkelen $50°$). a) Er $\tan 50° > 1$? Begrunn. b) Er $\tan 130° > 0$? Begrunn.

a) På enhetssirkelen er $\cos 50° = 0{,}64$ (x-koordinaten) og $\sin 50° = 0{,}77$ (y-koordinaten). Da er

$$\tan 50° = \frac{\sin 50°}{\cos 50°} = \frac{0{,}77}{0{,}64}.$$

Siden telleren 0,77 er **større** enn nevneren 0,64 (og begge er positive), er brøken større enn 1.

$$\boxed{\text{Ja, } \tan 50° = \tfrac{0{,}77}{0{,}64} > 1}$$

b) Vinkelen $130°$ ligger i **andre kvadrant**. Der er x-koordinaten (cosinus) negativ og y-koordinaten (sinus) positiv. Tangens er forholdet $\frac{\sin}{\cos} = \frac{(+)}{(-)}$, altså negativ.

$$\boxed{\text{Nei, } \tan 130° < 0}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Figuren viser et lite kvadrat og to rektangler som til sammen danner et stort kvadrat. Det lille kvadratet har side s, det store har side $s + t$. Sett opp en matematisk identitet med utgangspunkt i arealet av det store kvadratet.

Løsning. Arealet av det store kvadratet (side $s + t$) er

$$(s + t)^2.$$

Det store kvadratet er delt i tre deler, som vi finner arealet av hver for seg:

- det grønne rektangelet: bredde t, høyde $s + t$, areal $t(s + t)$,
- det blå rektangelet: bredde s, høyde t, areal st,
- det lille (hvite) kvadratet: side s, areal s^2.

Summen av delene er lik arealet av hele kvadratet:

$$(s + t)^2 = t(s + t) + st + s^2 = t^2 + st + st + s^2 = s^2 + 2st + t^2.$$

$$\boxed{(s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2}$$

Dette er nettopp første kvadratsetning, illustrert geometrisk.

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Oppgave. Modellen $P(x) = 3600 \cdot 0{,}85^{\,x} + 600$ gir antall papiravis-abonnenter x år etter 2010. a) Vis to ulike måter å finne antallet i 2010. b) Stigningstall for linja gjennom $(4, P(4))$ og $(14, P(14))$, med praktisk tolkning. c) Momentan vekstfart ved $x = 10$, med tolkning. d) Den digitale utgaven hadde 1000 abonnenter i 2019 og vokste 5,5 % per år fra 2019 til 2024. Hvilket år ble det for første gang flere digitale enn papir-abonnenter?

a) *Måte 1 — sette inn $x = 0$ (2010 er 0 år etter 2010):*

$$P(0) = 3600 \cdot 0{,}85^0 + 600 = 3600 \cdot 1 + 600 = 4200.$$

Måte 2 — lese av grafen: Tegn P i et digitalt verktøy og les av skjæringen med y-aksen ($x = 0$). Det gir samme verdi, 4200.

$$\boxed{P(0) = 4200 \text{ abonnenter}}$$

b) Stigningstallet til den rette linja gjennom de to punktene er den gjennomsnittlige vekstfarten:

$$P(4) = 3600 \cdot 0{,}85^4 + 600 \approx 2479{,}2, \qquad P(14) = 3600 \cdot 0{,}85^{14} + 600 \approx 970{,}0.$$

$$a = \frac{P(14) - P(4)}{14 - 4} = \frac{970{,}0 - 2479{,}2}{10} \approx -150{,}9.$$

$$\boxed{a \approx -151 \text{ abonnenter/år}}$$

Tolkning: I gjennomsnitt mistet papirutgaven om lag **151 abonnenter per år** i perioden fra 2014 til 2024.

c) Den momentane vekstfarten er den deriverte. Med $P(x) = 3600 \cdot 0{,}85^{\,x} + 600$ er

$$P'(x) = 3600 \cdot \ln(0{,}85) \cdot 0{,}85^{\,x}.$$

$$P'(10) = 3600 \cdot \ln(0{,}85) \cdot 0{,}85^{10} \approx -115{,}2.$$

$$\boxed{P'(10) \approx -115 \text{ abonnenter/år}}$$

Tolkning: I 2020 ($x = 10$) **sank** antallet papirabonnenter med om lag **115 abonnenter per år** i øyeblikket.

d) Den digitale utgaven modelleres med $D(t) = 1000 \cdot 1{,}055^{\,t}$, der t er antall år etter 2019. Papir er $P(x)$ med x år etter 2010, så i et gitt år er $x = t + 9$. Vi sammenligner år for år:

År	Digital D	Papir P	Digital > papir?
2019	1000	1434	nei
2020	1055	1309	nei
2021	1113	1202	nei
2022	**1174**	**1112**	**ja**
2023	1239	1035	ja
2024	1307	970	ja

$$\boxed{\text{Første gang i 2022}}$$

Merk (tolkning). Oppgaven spør «Kva år … for første gong fleire …». Med en *årlig* sammenligning (digital vokser «5,5 % kvart år») er papir fortsatt størst i 2021 ($1113 < 1202$), og digital er for første gang størst i **2022**. Den offisielle fasiten tegner i stedet begge modellene som kontinuerlige kurver og leser av skjæringspunktet, som inntreffer rundt $t \approx 2{,}6$ (dvs. **sommeren 2021**). Begge tolkningene er gyldige; vi oppgir det diskrete årssvaret (2022) siden spørsmålet etterspør et år og veksten er oppgitt per år.

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. En stjerne settes sammen av 12 like store likesidede trekanter med side 4. Maria fant arealet $48\sqrt{3}$ med Pytagoras. Vis at du får samme resultat med trigonometri.

Løsning. Arealet av én trekant finner vi med arealsetningen ($A = \frac{1}{2}ab\sin C$). En likesidet trekant med side 4 har alle vinkler 60°, så to sider er 4 og 4 med mellomliggende vinkel 60°:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Stjerna består av 12 slike trekanter:

$$A = 12 \cdot 4\sqrt{3} = \boxed{48\sqrt{3}}.$$

Samme svar som Maria fikk med Pytagoras.

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. En rasjonal funksjon f har asymptotene $x = 2$ og $y = 4$, og nullpunkt i $x = -3$. Bestem et mulig uttrykk for $f(x)$ og forklar tankegangen.

Løsning. Vi bygger opp uttrykket fra de tre kravene:

- **Vertikal asymptote $x = 2$:** nevneren må bli null der, altså inneholde faktoren $(x - 2)$.
- **Nullpunkt $x = -3$:** telleren må bli null der, altså inneholde faktoren $(x + 3)$.
- **Horisontal asymptote $y = 4$:** teller og nevner må ha samme grad, og forholdet mellom de ledende koeffisientene må være 4.

Et naturlig valg er teller og nevner av første grad:

$$f(x) = \frac{4(x+3)}{x-2}.$$

Kontroll: $f(-3) = 0$ (nullpunkt), nevneren er null i $x = 2$ (vertikal asymptote), og for store $|x|$ er $f(x) \to \frac{4x}{x} = 4$ (horisontal asymptote $y = 4$).

$$\boxed{f(x) = \frac{4(x+3)}{x-2}}$$

Merk: Oppgaven har mange riktige svar; dette er ett eksempel.

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. $n!$ er produktet av tallene fra 1 til n. a) Lag et program som regner ut $n!$, og bruk det til å finne 5!, 10! og 15!. b) 100! slutter med 24 nuller — gjør rede for hvilke faktorer som gir disse nullene.

a) Program (Python):

```python
def fakultet(n):
    resultat = 1
    for i in range(2, n + 1):
        resultat *= i
    return resultat

for n in (5, 10, 15):
    print(f"{n}! = {fakultet(n)}")
# 5! = 120
# 10! = 3628800
# 15! = 1307674368000
```

Program (C++):

```cpp
#include <iostream>

unsigned long long fakultet(int n) {
    unsigned long long resultat = 1;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) resultat *= i;
    return resultat;
}

int main() {
    int verdier[] = {5, 10, 15};
    for (int n : verdier)
        std::cout << n << "! = " << fakultet(n) << "\n";
    // 5! = 120
    // 10! = 3628800
    // 15! = 1307674368000
```

```
    return 0;
}
```

(Merk at 15! er for stort for en vanlig 32-bits `int` i C++, derfor brukes `unsigned long long`.)

$$\boxed{5! = 120, \quad 10! = 3\,628\,800, \quad 15! = 1\,307\,674\,368\,000}$$

b) Et nullsiffer på slutten av et tall oppstår av faktoren $10 = 2 \cdot 5$. Antallet sluttnuller er derfor lik hvor mange ganger 10 deler 100!, altså hvor mange par av faktorene 2 og 5 som finnes. I produktet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100$ er det rikelig med toere (annethvert tall er delelig med 2), så det er **femtallene** som er den begrensende faktoren.

Vi teller hvor mange ganger 5 er en faktor:

- Tall delelig med 5: $5, 10, 15, \dots, 100$ — det er $\dfrac{100}{5} = 20$ stykker, hver bidrar med (minst) én femmer.
- Tall delelig med 25: $25, 50, 75, 100$ — det er $\dfrac{100}{25} = 4$ stykker, og hver av disse bidrar med en **ekstra** femmer.

Til sammen blir det

$$20 + 4 = 24 \text{ femtall-faktorer.}$$

Siden det finnes langt flere totall-faktorer enn 24, kan hver av de 24 femmerne pares med en toer til en faktor 10. Derfor slutter 100! med nøyaktig

$$\boxed{24 \text{ nuller}}.$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Oppgave. Tredjegradsfunksjonen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ oppfyller: grafen går gjennom $(2, 6)$; $(-2, 8)$ er toppunkt; tangenten i $(3, f(3))$ har stigningstall 4. Bestem a, b, c og d.

Løsning. Den deriverte er $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Opplysningene gir fire likninger:

$$\begin{aligned}
f(2) = 6: &\quad 8a + 4b + 2c + d = 6,\\
f(-2) = 8: &\quad -8a + 4b - 2c + d = 8,\\
f'(-2) = 0 \text{ (toppunkt)}: &\quad 12a - 4b + c = 0,\\
f'(3) = 4 \text{ (tangent)}: &\quad 27a + 6b + c = 4.
\end{aligned}$$

Dette lineære systemet løses (for hånd eller med CAS) og gir

$$a = \frac{3}{20} = 0{,}15, \quad b = \frac{7}{40} = 0{,}175, \quad c = -\frac{11}{10} = -1{,}1, \quad d = \frac{63}{10} = 6{,}3.$$

$$\boxed{f(x) = 0{,}15x^3 + 0{,}175x^2 - 1{,}1x + 6{,}3}$$

Kontroll: $f(2) = 6$, $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 0$ og $f'(3) = 4$. Siden $f''(-2) = 6a(-2) + 2b = -1{,}45 < 0$, er $(-2, 8)$ virkelig et toppunkt.

Oppgave 6 (4 poeng)

Oppgave. Firkanten $ABCD$ med $AB = 8{,}0$ og $CD = 12{,}0$. To grupper skal finne arealet med ulike opplysninger. a) Isabels gruppe vet $AD = 6{,}0$, $BC = 10{,}0$ og diagonalen $AC = 16{,}4$. b) Annikens gruppe vet $\angle A = 62{,}5^\circ$, $\angle C = 38{,}3^\circ$, $\angle ABD = 45{,}5^\circ$ og $\angle CBD = 85{,}5^\circ$.

a) Isabels gruppe. Diagonalen AC deler firkanten i to trekanter, ABC og ACD, der vi kjenner alle tre sidene i hver. I hver trekant finner vi en vinkel med **cosinussetningen** og deretter arealet med **arealsetningen** ($A = \frac{1}{2}ab\sin C$).

Trekant ABC (sider $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 16{,}4$). Vinkelen ved B:

$$\cos B = \frac{8^2 + 10^2 - 16{,}4^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{64 + 100 - 268{,}96}{160} \approx -0{,}656 \;\Rightarrow\; B \approx 131{,}0^\circ.$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 131{,}0^\circ \approx 30{,}2.$$

Trekant ACD (sider $AD = 6$, $CD = 12$, $AC = 16{,}4$). Vinkelen ved D:

$$\cos D = \frac{6^2 + 12^2 - 16{,}4^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{36 + 144 - 268{,}96}{144} \approx -0{,}618 \;\Rightarrow\; D \approx 128{,}2^\circ.$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 128{,}2^\circ \approx 28{,}3.$$

Samlet areal:

$$\boxed{A = A_{ABC} + A_{ACD} \approx 30{,}2 + 28{,}3 = 58{,}5}$$

b) Annikens gruppe. Her bruker vi den **andre** diagonalen, BD, som deler firkanten i trekantene ABD og CBD. I hver trekant kjenner vi to vinkler og én side, så vi bruker **sinussetningen** og deretter arealsetningen.

Trekant ABD: $\angle DAB = 62{,}5^\circ$ og $\angle ABD = 45{,}5^\circ$, så $\angle ADB = 180^\circ - 62{,}5^\circ - 45{,}5^\circ = 72^\circ$. Vi kjenner $AB = 8$. Sinussetningen gir AD:

$$\frac{AD}{\sin(\angle ABD)} = \frac{AB}{\sin(\angle ADB)} \;\Rightarrow\; AD = 8 \cdot \frac{\sin 45{,}5^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 6{,}0.$$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6{,}0 \cdot \sin 62{,}5^\circ \approx 21{,}3.$$

Trekant CBD: $\angle DCB = 38{,}3^\circ$ og $\angle CBD = 85{,}5^\circ$, så $\angle CDB = 180^\circ - 38{,}3^\circ - 85{,}5^\circ = 56{,}2^\circ$. Vi kjenner $CD = 12$. Sinussetningen gir CB:

$$\frac{CB}{\sin(\angle CDB)} = \frac{CD}{\sin(\angle CBD)} \;\Rightarrow\; CB = 12 \cdot \frac{\sin 56{,}2^\circ}{\sin 85{,}5^\circ} \approx 10{,}0.$$

$$A_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot CB \cdot \sin(\angle C) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10{,}0 \cdot \sin 38{,}3^\circ \approx 37{,}2.$$

Samlet areal:

$$\boxed{A = A_{ABD} + A_{CBD} \approx 21{,}3 + 37{,}2 = 58{,}5}$$

Begge gruppene kommer fram til samme areal, om lag 58,5.

Oppgave 7 (8 poeng)

Oppgave. Else gjerder inn tre områder: et rektangel i midten og to likebeinte rettvinklede trekanter på sidene. Trekantene har kateter med lengde x (vannrett base og loddrett høyde), og rektangelet har bredde y og høyde x. Hun har totalt 100 m gjerde som settes langs alle linjestykkene i figuren. a) Areal når $x = 8$. b) Oversikt over hvordan arealet endrer seg, og omtrent hvilken x som gir størst areal. c) Modell $A(x)$. d) Lengden x som gir størst areal. e) Modellens gyldighetsområde.

Oppsett. Vi teller alle linjestykkene som gjerdet følger:

- nederst: $x + y + x = 2x + y$,
- øverst: y,
- to loddrette skillelinjer (høyden i hver trekant / siden av rektangelet): $x + x = 2x$,
- to skrå yttersider (hypotenusene i de likebeinte rettvinklede trekantene): hver er $\sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$, til sammen $2\sqrt{2}\,x$.

Samlet gjerdelengde:

$$2x + y + y + 2x + 2\sqrt{2}\,x = 4x + 2y + 2\sqrt{2}\,x = 100.$$

Løser vi for y:

$$y = \frac{100 - 4x - 2\sqrt{2}\,x}{2} = 50 - 2x - \sqrt{2}\,x.$$

Arealet av grønnsakhagen er rektangelet pluss de to trekantene. Setter vi inn uttrykket for y, får vi arealet som funksjon av x alene:

$$A(x) = \underbrace{x \cdot y}_{\text{rektangel}} + \underbrace{2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot x}_{\text{to trekanter}} = x\,(50 - 2x - \sqrt{2}\,x) + x^2 = 50x - (1 + \sqrt{2})\,x^2.$$

(Dette er modellen vi spør etter i del c.)

a) Areal når $x = 8$.

$$A(8) = -(1 + \sqrt{2}) \cdot 64 + 50 \cdot 8 = 400 - 64(1 + \sqrt{2}) \approx 400 - 154{,}5 = 245{,}5.$$

$$\boxed{A(8) \approx 245{,}5 \text{ m}^2}$$

b) Oversikt. Tegner vi $A(x)$ (eller setter opp en verditabell), ser vi en parabel som åpner nedover med toppunkt rundt $x \approx 10$:

x (m)	5	8	10	10{,}4	12	14
$A(x)$ (m^2)	189{,}6	245{,}5	258{,}6	258{,}9	252{,}4	226{,}8

Oversikten viser at arealet øker fram til omtrent $x \approx 10$–11 m og deretter avtar. Else bør derfor velge kateter på **rundt 10 meter** for størst mulig areal.

c) Modell. Av oppsettet over har vi modellen

$$\boxed{A(x) = -(1+\sqrt{2})\,x^2 + 50x}$$

d) Eksakt maksimum. Toppunktet finnes der $A'(x) = 0$:

$$A'(x) = -2(1+\sqrt{2})\,x + 50 = 0 \implies x = \frac{50}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{25}{1+\sqrt{2}} = 25(\sqrt{2}-1) \approx 10{,}4.$$

$$A(10{,}4) \approx 258{,}9.$$

$$\boxed{x \approx 10{,}4 \text{ m gir størst areal, om lag } 258{,}9 \text{ m}^2}$$

e) Gyldighetsområde. Både x og y må være positive lengder. Kravet $x > 0$ er klart. Kravet $y > 0$ gir

$$50 - 2x - \sqrt{2}\,x > 0 \implies x < \frac{50}{2+\sqrt{2}} = 25(2-\sqrt{2}) \approx 14{,}6.$$

$$\boxed{0 < x < 25(2-\sqrt{2}) \approx 14{,}6 \text{ m}}$$
