

Matematikk 1T — Høst 2025

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 + 4x - 5 < 0$.

Løsning. Vi finner nullpunktene til $x^2 + 4x - 5$ med abc-formelen:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2},$$

altså $x = -5$ og $x = 1$. Dermed er $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$.

Parabelen åpner oppover, så uttrykket er negativt (mindre enn null) *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-5 < x < 1}$$

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Bestem nullpunktene til $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$.

Løsning. Vi prøver heltallsdelere av konstantleddet 12. Med $x = 1$:

$$1 - 5 - 8 + 12 = 0,$$

så $x = 1$ er et nullpunkt, og $(x - 1)$ er en faktor. Polynomdivisjon gir

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x^2 - 4x - 12).$$

Den andre faktoren faktoriseres: $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$. Nullpunktene blir dermed

$$\boxed{x = -2, \quad x = 1, \quad x = 6}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. Gitt $f(x) = \frac{2x+6}{x^2+4}$. Avgjør hvilke av fire påstander som er riktige (med begrunnelse):
1) nøyaktig ett nullpunkt, 2) ingen vertikale asymptoter, 3) skjærer aldri y -aksen, 4) horisontal asymptote $y = 2$.

Løsning. En brøk er null bare når telleren er null (og nevneren ulik null).

Påstand 1 — RIKTIG. Nullpunkt: $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$. Nevneren $x^2 + 4 = 13 \neq 0$ der, så $x = -3$ er et gyldig nullpunkt — og det eneste, siden telleren bare har dette nullpunktet.

Påstand 2 — RIKTIG. Vertikale asymptoter oppstår der nevneren er null. Men $x^2 + 4 > 0$ for alle reelle x (likningen $x^2 = -4$ har ingen reell løsning), så nevneren er aldri null. Funksjonen har derfor ingen vertikale asymptoter.

Påstand 3 — GAL. Grafen skjærer y -aksen i $x = 0$:

$$f(0) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Siden $x = 0$ er i definisjonsmengden, skjærer grafen y -aksen i $(0, \frac{3}{2})$.

Påstand 4 — GAL. Nevneren har høyere grad (2) enn telleren (1), så

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+6}{x^2+4} = 0.$$

Den horisontale asymptoten er $y = 0$, ikke $y = 2$.

Påstand 1 og 2 er riktige; påstand 3 og 4 er gale.

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Oskar satte lottogevinsten i banken for 5 år siden og har fått 4,5% rente per år. I dag har han 250 000 kr. Hvilke(t) av seks oppgitte uttrykk gir gevinsten?

Løsning. La G være gevinsten. Med 4,5% årlig rente i 5 år har beløpet vokst med vekstfaktor 1,045 per år:

$$G \cdot 1,045^5 = 250\,000 \implies G = \frac{250\,000}{1,045^5} = 250\,000 \cdot 1,045^{-5}.$$

Uttrykk **2)** $\frac{250\,000}{1,045^5}$ og uttrykk **6)** $250\,000 \cdot 1,045^{-5}$ er identiske og begge riktige.

Uttrykk 2 og 6

Oppgave 5 (5 poeng)

Oppgave. a) Bruk en rettvinklet trekant med kateter 1 og 1 til å vise at $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. b) Finn arealet av trekant ABC der $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 8$, $\angle A = 45^\circ$. c) Avgjør hvilken av ABC og PQR (der $PQ = 3\sqrt{2}$, $PR = 8$, $\angle P = 140^\circ$) som har størst areal.

a) I den rettvinklede trekanten med begge kateter lik 1 er hypotenusen ved Pytagoras

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Vinkelen mot grunnlinjen er 45° (likebeint rettvinklet trekant). Da er

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

b) Areal med to sider og mellomliggende vinkel:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Her forsvinner $\sqrt{2}$:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = \boxed{12}.$$

c) Trekant PQR har samme to sider, men mellomliggende vinkel 140° :

$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sin 140^\circ = 12\sqrt{2} \cdot \sin 140^\circ.$$

Siden $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ \approx 0,643 < \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, blir $A_{PQR} \approx 10,9 < 12$. Begge har samme «sideprodukt» $12\sqrt{2}$, så den med størst sinus til mellomvinkelen vinner. Vinkelen nærmest 90° gir størst sinus, og 45° ligger nærmere 90° enn 140° .

Trekant ABC har størst areal.

Oppgave 6 (3 poeng)

Oppgave. Et program teller opp femkant tall: $\text{tall} = 1$, $\text{differanse} = 4$; så lenge $\text{tall} \leq 60$: skriv ut tall , øk tall med differanse , og øk differanse med 3. Hvilke tall skrives ut, og hvilken sammenheng har Siri oppdaget?

Løsning. Vi følger sløyfen. Startverdier $\text{tall} = 1$, $\text{differanse} = 4$:

Utskrift	Ny differanse	Neste tall
1	$4 \rightarrow 7$	$1 + 4 = 5$
5	$7 \rightarrow 10$	$5 + 7 = 12$
12	$10 \rightarrow 13$	$12 + 10 = 22$

Utskrift	Ny differanse	Neste tall
22	13 → 16	22 + 13 = 35
35	16 → 19	35 + 16 = 51
51	19 → 22	51 + 19 = 70

Når tallet blir 70, er $70 \leq 60$ usant, og sløyfen stopper. Tallene som skrives ut er

1, 5, 12, 22, 35, 51

Programmet i oppgaven er skrevet i Python. Gjengitt som kjørbart program:

Python:

```
tall = 1
differanse = 4
while tall <= 60:
    print(tall, end=" ") # 1 5 12 22 35 51
    tall = tall + differanse
    differanse = differanse + 3
print()
```

Skrevet om til C++ gir det samme utskrift:

C++:

```
#include <iostream>
int main() {
    int tall = 1, differanse = 4;
    while (tall <= 60) {
        std::cout << tall << " "; // 1 5 12 22 35 51
        tall += differanse;
        differanse += 3;
    }
    std::cout << "\n";
    return 0;
}
```

Sammenhengen. Dette er *femkanttallene*. Differansen mellom to nabetall starter på 4 og øker med 3 hver gang (4, 7, 10, 13, ...). Femkantttall nr. n kan skrives på lukket form som

$$P_n = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Kontroll: $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, $P_5 = 35$, $P_6 = 51$ — i samsvar med utskriften.

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Oppgave. En tabell gir lengde (cm) og vekt (gram) for en fisk:

Lengde (cm)	50	70	80	100	120	130
Vekt (g)	1190	3320	5070	9610	16 080	21 590

Modellen er $F(x) = a \cdot x^b$. a) Bestem a og b og tegn grafen. b) Stigningstall for linja gjennom $(75, F(75))$ og $(95, F(95))$, med tolkning. c) Momentan vekstfart ved $x = 100$, med tolkning. d) Hvor mange prosent øker vekten hvis lengden øker med 20 %?

a) Vi bruker *regresjon* (potensregresjon) på dataene i et digitalt verktøy (GeoGebra/CAS). Det gir

$$a \approx 0,0097, \quad b \approx 3,00,$$

altså

$$F(x) \approx 0,0097 x^3.$$

(Mer nøyaktig gir regresjonen $a \approx 0,00966$ og $b \approx 3,00$; vi runder a til 0,0097 og bruker denne verdien konsekvent videre.) At $b \approx 3$ er rimelig: vekten (massen) er omtrent proporsjonal med volumet, og volumet vokser med tredjepotensen av lengden. Grafen tegnes i GeoGebra/digitalt verktøy: en voksende potensfunksjon for $x > 0$ som går gjennom datapunktene, fra ca. (50, 1200) til (130, 21 300).

b) Vekstfarten i gjennomsnitt mellom $x = 75$ og $x = 95$ er stigningstallet til sekanten:

$$F(75) \approx 0,0097 \cdot 75^3 \approx 4092, \quad F(95) \approx 0,0097 \cdot 95^3 \approx 8317.$$

$$a_{\text{linje}} = \frac{F(95) - F(75)}{95 - 75} \approx \frac{8317 - 4092}{20} \approx \boxed{211 \text{ g/cm}}.$$

Tolkning: I lengdeintervallet fra 75 cm til 95 cm øker vekten i gjennomsnitt med ca. 211 gram per ekstra centimeter lengde.

c) Momentan vekstfart er den deriverte. Med $F(x) = ax^3$ er $F'(x) = 3ax^2$:

$$F'(100) = 3 \cdot 0,0097 \cdot 100^2 \approx \boxed{291 \text{ g/cm}}.$$

Tolkning: Når fisken er nøyaktig 100 cm lang, øker vekten med ca. 291 gram per centimeter den vokser i lengde akkurat da.

d) Øker lengden med 20 %, blir ny lengde $1,2x$. Da blir ny vekt

$$F(1,2x) = a(1,2x)^3 = 1,2^3 \cdot ax^3 = 1,728 \cdot F(x).$$

Vekten blir altså 172,8 % av den opprinnelige, en økning på

$$\approx \boxed{72,8 \%}.$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. I dag er Abid, Therese og Harald til sammen 68 år. Therese er 17 år eldre enn Abid. Om tre år er Abid dobbelt så gammel som Harald. Finn alderen i dag.

Løsning. La a , t , h være alderen i dag til henholdsvis Abid, Therese og Harald. Da er

$$\begin{aligned}a + t + h &= 68 \\t &= a + 17 \\a + 3 &= 2(h + 3)\end{aligned}$$

Fra den tredje likningen: $a + 3 = 2h + 6 \Rightarrow a = 2h + 3$. Sett $t = a + 17$ og $a = 2h + 3$ inn i den første:

$$(2h + 3) + (2h + 3 + 17) + h = 68 \Rightarrow 5h + 23 = 68 \Rightarrow h = 9.$$

Da er $a = 2 \cdot 9 + 3 = 21$ og $t = 21 + 17 = 38$.

Abid 21 år, Therese 38 år, Harald 9 år
--

Kontroll: $21 + 38 + 9 = 68$. ✓ Om tre år: Abid 24, Harald 12, og $24 = 2 \cdot 12$. ✓

Oppgave 3 (5 poeng)

Oppgave. En firkant $ABCD$ er delt av diagonalen AC . I trekant ACD (øverst) er $\angle ADC = 120^\circ$, $DC = \sqrt{3}$ og $\angle DCA = 30^\circ$. I trekant ABC (nederst) er $\angle BAC = 45^\circ$ og $CB = \sqrt{6}$. a) Vis at $AC = 3$. b) Finn det eksakte arealet av $ABCD$.

a) Se på trekant ACD . Vinkelsummen gir

$$\angle DAC = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Med sinussetningen (AC ligger motstående $\angle ADC$, og DC ligger motstående $\angle DAC$):

$$\frac{AC}{\sin(\angle ADC)} = \frac{DC}{\sin(\angle DAC)} \Rightarrow AC = DC \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \boxed{3}.$$

b) Vi finner arealet av de to trekantene hver for seg.

Trekant ACD: med to sider $AC = 3$, $DC = \sqrt{3}$ og mellomliggende vinkel $\angle DCA = 30^\circ$:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Trekant ABC: vi kjenner $AC = 3$, $CB = \sqrt{6}$ og $\angle BAC = 45^\circ$. Med sinussetningen finner vi $\angle ABC$:

$$\frac{CB}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} \Rightarrow \sin(\angle ABC) = \frac{AC \cdot \sin 45^\circ}{CB} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Likningen $\sin(\angle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ har i prinsippet to løsninger, 60° og 120° . Av figuren ser vi at AB er den lengste siden i trekant ABC , så den største vinkelen må ligge ved C (motstående AB); det utelukker 120° ved B . Vi velger derfor $\angle ABC = 60^\circ$, og dermed $\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$. Arealet med AC , CB og mellomvinkelen $\angle ACB$:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{3(\sqrt{36} + \sqrt{12})}{8} = \frac{3(6 + 2\sqrt{3})}{8} = \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Her brukte vi $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Det samlede arealet blir

$$A_{ABCD} = A_{ACD} + A_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}} \approx 4,85.$$

Oppgave 4 (3 poeng)

Oppgave. En likesidet trekant deles i stadig flere små likesidede trekanter, og et mønster fargelegges grått. a) Sett opp en algoritme for summen av arealene til de 100 første grå trekantene. b) Lag et program som regner ut summen når startarealet er 36.

Løsning — mønsteret. Hvert delesteg deler en trekant i 4 like store deltrekanter, og én av disse fargelegges grå. Hvis vi starter med areal A , er

- den 1. grå trekanten $\frac{A}{4}$,
- den 2. grå trekanten $\frac{A}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{A}{16}$,
- den 3. grå trekanten $\frac{A}{64}$, osv.

Dette er en **geometrisk rekke** med første ledd $a_1 = \frac{A}{4}$ og kvotient $k = \frac{1}{4}$.

a) **Algoritme (pseudokode):**

```
sett startareal = A
sett ledd = startareal / 4      (areal av den 1. grå trekanten)
sett sum = 0
gjenta n = 1 til 100:
    sum = sum + ledd           (legg til arealet av grå trekant nr. n)
    ledd = ledd / 4           (neste grå trekant er 1/4 så stor)
skriv ut sum
```

b) **Program.** Med startareal $A = 36$:

Python:

```
startareal = 36
ledd = startareal / 4 # areal av første grå trekant
sum_areal = 0
for n in range(1, 101):
    sum_areal += ledd
    ledd /= 4
print(round(sum_areal, 2)) # 12.0
```

C++:

```

#include <iostream>
#include <iomanip>
int main() {
    double startareal = 36.0;
    double ledd = startareal / 4.0; // areal av første graa trekant
    double sum = 0.0;
    for (int n = 1; n <= 100; ++n) {
        sum += ledd;
        ledd /= 4.0;
    }
    std::cout << std::fixed << std::setprecision(2) << sum << "\n"; // 12.00
    return 0;
}

```

Begge gir samme svar. Vi kan kontrollere med summeformelen for geometrisk rekke:

$$S_{100} = a_1 \cdot \frac{1 - k^{100}}{1 - k} = \frac{36}{4} \cdot \frac{1 - (1/4)^{100}}{1 - 1/4} = 9 \cdot \frac{1}{3/4} (1 - (1/4)^{100}) = 12(1 - (1/4)^{100}).$$

Leddet $(1/4)^{100}$ er forsvinnende lite, så

$$\boxed{S_{100} \approx 12}.$$

(Den uendelige summen er nøyaktig $\frac{a_1}{1 - k} = \frac{9}{3/4} = 12$.)

Oppgave 5 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = \frac{10}{x^2 + 3}$, $x > 0$. Et rektangel $ABCD$ har A i origo, B på x -aksen, C på grafen til f og D på y -aksen. a) Finn arealet når $B = (3, 0)$. b) Hvor på x -aksen må B ligge for at arealet skal bli størst mulig?

Løsning. Hvis $B = (x, 0)$, har rektangelet bredde x og høyde $f(x)$ (siden $C = (x, f(x))$ ligger på grafen). Arealet er

$$A(x) = x \cdot f(x) = \frac{10x}{x^2 + 3}.$$

a) Med $B = (3, 0)$:

$$A(3) = \frac{10 \cdot 3}{3^2 + 3} = \frac{30}{12} = \boxed{\frac{5}{2} = 2,5}.$$

b) Vi maksimerer $A(x) = \frac{10x}{x^2 + 3}$ ved å derivere (brøkregelen):

$$A'(x) = \frac{10(x^2 + 3) - 10x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{10(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^2}.$$

$A'(x) = 0$ når $3 - x^2 = 0$, altså $x = \sqrt{3}$ (vi velger den positive løsningen siden $x > 0$). For $x < \sqrt{3}$ er $A' > 0$, og for $x > \sqrt{3}$ er $A' < 0$, så $x = \sqrt{3}$ gir maksimum.

$$B = (\sqrt{3}, 0) \approx (1,73, 0)$$

Det største arealet er $A(\sqrt{3}) = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,89$.

Oppgave 6 (3 poeng)

Oppgave. Et snitt av en lagerhall er en parabel $p(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 20$ (20 m høy). Et webkamera sitter på toppen av en 3 m lang stang, i punktet $(0, 23)$. En rett linje gjennom $(0, 23)$ er tangent til parabelen. a) Bestem likningen for tangenten. b) Hvor langt fra veggen kan en tyv bevege seg uten å bli fotografert?

a) La tangenten røre parabelen i punktet $(t, p(t))$. Den deriverte er

$$p'(x) = -\frac{1}{6}x, \quad \text{så stigningstallet i } x = t \text{ er } p'(t) = -\frac{1}{6}t.$$

Tangentlinja: $y = p(t) + p'(t)(x - t)$. Den skal gå gjennom $(0, 23)$:

$$23 = p(t) - tp'(t) = \left(-\frac{1}{12}t^2 + 20\right) - t\left(-\frac{1}{6}t\right) = -\frac{1}{12}t^2 + 20 + \frac{1}{6}t^2 = \frac{1}{12}t^2 + 20.$$

Da er $\frac{1}{12}t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 36 \Rightarrow t = \pm 6$. Fra figuren heller linja nedover mot høyre, så vi velger $t = 6$ med stigningstall $p'(6) = -1$. Tangenten blir

$$y = -x + 23$$

(røringspunkt $(6, 17)$). *Merk:* $t = -6$ gir den speilvendte tangenten $y = x + 23$ på venstre side.

b) Kameraet «ser» langs tangenten ned mot bakken, men taket (parabelen) skygger for området bak røringspunktet. Den blinde sonen på bakken ($y = 0$) ligger mellom **veggen** og det punktet der tangentlinja treffer bakken.

Hvor er veggen? Veggen er der taket møter bakken, altså der $p(x) = 0$:

$$-\frac{1}{12}x^2 + 20 = 0 \Rightarrow x^2 = 240 \Rightarrow x = \sqrt{240} = 4\sqrt{15} \approx 15,49 \text{ m.}$$

Hvor treffer kameraets siktelinje bakken? Sett $y = 0$ i tangenten:

$$0 = -x + 23 \Rightarrow x = 23 \text{ m.}$$

Tyven er skjult mellom veggen ($x \approx 15,49$) og der sikten når bakken ($x = 23$). Avstanden fra veggen blir

$$23 - 4\sqrt{15} \approx 23 - 15,49 = \boxed{\approx 7,5 \text{ m}}.$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.