Matematikk 1T — Vår 2011

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (13 poeng)

Oppgave. En blandet grunnoppgave: a) skriv to tall på standardform, b) løs en andregradslikning, c) løs en ulikhet, d) plasser seks tallverdier på en gitt tallinje med punktene A–L, e) løs en logaritmelikning, f) lag krysstabell/venndiagram fra et tekststykke og finn en sannsynlighet.

a) Standardform.

$$36\,200\,000 = \boxed{3{,}62 \cdot 10^{7}}$$

$$0{,}034 \cdot 10^{-2} = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = \boxed{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$$

b) Likningen $x^2 + 6x = 16$.

Vi flytter alt over og løser $x^2 + 6x - 16 = 0$. Faktorisering (tall som ganger til -16 og summerer til 6: 8 og -2):

$$(x+8)(x-2) = 0 \implies x = -8 \text{ eller } x = 2.$$

$$\boxed{x = -8 \quad \text{eller} \quad x = 2}$$

c) Ulikheten $x^2 - x > 0$.

Faktoriser: $x^2 - x = x(x-1)$, med nullpunkter $x = 0$ og $x = 1$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er positivt *utenfor* nullpunktene:

$$\boxed{x < 0 \quad \text{eller} \quad x > 1}$$

d) Plassering på tallinjen. Tallinjen har 12 merkede punkter $A, B, \dots, L$ mellom 0 og 6. Vi regner ut hver verdi og finner punktet:

Uttrykk	Verdi	Punkt
$8^{1/3}$	$\sqrt[3]{8} = 2$	E (ved 2)
$5{,}5^0$	1	C (ved 1)
$\sqrt{21}$	$\approx 4{,}58$ (siden $4^2 = 16$, $5^2 = 25$)	J (mellom 4 og 5)
$\tan 30°$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$	B (mellom 0 og 1)
$6 \cdot 2^{-1}$	$\dfrac{6}{2} = 3$	G (ved 3)
$\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$	$\dfrac{27}{8} = 3{,}375$	H (litt over 3)

e) Likningen $\lg(2x - 1) = 2$.

lg er tierlogaritmen, så $2x - 1 = 10^2 = 100$:

$$2x - 1 = 100 \implies 2x = 101 \implies \boxed{x = \tfrac{101}{2} = 50{,}5}.$$

(Sjekk: $2x - 1 = 100 > 0$, så uttrykket er definert.)

f) Sommerferie i klasse 1A. 20 elever. 16 har sommerjobb; 10 av disse skal også på ferie; 2 har verken jobb eller ferie.

1) Krysstabell. La oss fylle inn. Av de 16 med jobb skal 10 på ferie, så $16 - 10 = 6$ med jobb skal *ikke* på ferie. Uten jobb er $20 - 16 = 4$ elever; av disse skal 2 ikke på ferie, så $4 - 2 = 2$ uten jobb skal på ferie.

	På ferie	Ikke på ferie	Sum
Har jobb	10	6	16
Har ikke jobb	2	2	4
Sum	12	8	20

2) Sannsynlighet for ferie. Totalt $10 + 2 = 12$ av 20 skal på ferie:

$$P(\text{ferie}) = \frac{12}{20} = \boxed{\frac{3}{5} = 0{,}6}.$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - 2$. a) Tegn grafen for $x \in [-3, 3]$. b) Finn likningen for linjen gjennom $(0, f(0))$ og $(2, f(2))$. c) Finn tangenten til f der $x = 1$ ved regning, og tegn den i samme koordinatsystem.

a) Grafen. f er en parabel med bunnpunkt $(0, -2)$ og nullpunkter der $x^2 = 2$, altså $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$. Noen punkter:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	2	-1	-2	-1	2	7

Tegn en symmetrisk parabel gjennom disse punktene.

b) Linjen gjennom $(0, f(0))$ og $(2, f(2))$. Her er $f(0) = -2$ og $f(2) = 4 - 2 = 2$, altså punktene $(0, -2)$ og $(2, 2)$. Stigningstallet er

$$a = \frac{2 - (-2)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Konstantleddet er $b = -2$ (skjæring med y-aksen i $(0, -2)$). Linjen blir

$$\boxed{y = 2x - 2}.$$

c) Tangenten i $x = 1$. Vi deriverer: $f'(x) = 2x$, så stigningstallet er $f'(1) = 2$. Tangeringspunktet er $(1, f(1)) = (1, -1)$. Ettpunktsformelen gir

$$y - (-1) = 2(x - 1) \implies y = 2x - 2 - 1 \implies \boxed{y = 2x - 3}.$$

Tegn denne rette linjen (stigning 2, skjæring -3) i samme koordinatsystem; den tangerer parabelen i $(1, -1)$.

Merk: tangenten i c) er parallell med linjen i b) — begge har stigningstall 2.

Oppgave 3 (5 poeng)

Oppgave. Et kvadrat $ABCD$ med sidelengde 1. E er midtpunkt på BC og F er midtpunkt på CD. a) Vis med Pytagoras at $AE = AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$. b) Vis at arealet av $\triangle AEF$ er $\frac{3}{8}$. c) Vis at $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, der $\alpha = \angle EAF$.

Vi legger inn koordinater: $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$. Da er $E = (1, \frac{1}{2})$ (midt på BC) og $F = (\frac{1}{2}, 1)$ (midt på CD).

a) Lengdene AE og AF. I den rettvinklede trekanten ABE er katetene $AB = 1$ og $BE = \frac{1}{2}$. Pytagoras:

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Av symmetri (trekant ADF har samme kateter $AD = 1$, $DF = \frac{1}{2}$) er

$$\boxed{AE = AF = \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

b) Arealet av $\triangle AEF$. Enklest er å trekke fra. Arealet av kvadratet er 1. Vi fjerner de tre rettvinklede trekantene:

- $\triangle ABE$: kateter 1 og $\frac{1}{2}$, areal $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- $\triangle ADF$: kateter 1 og $\frac{1}{2}$, areal $\frac{1}{4}$.
- $\triangle ECF$: kateter $EC = \frac{1}{2}$ og $CF = \frac{1}{2}$, areal $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Dermed

$$[\triangle AEF] = 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} = 1 - \tfrac{5}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

c) Vis at $\sin\alpha = \frac{3}{5}$**.** Arealet av en trekant kan også skrives med to sider og mellomliggende vinkel. Sidene fra A er $AE = AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$, og vinkelen mellom dem er α:

$$[\triangle AEF] = \frac{1}{2}\,AE \cdot AF \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sin\alpha = \frac{5}{8}\sin\alpha.$$

Sett dette lik svaret fra b):

$$\frac{5}{8}\sin\alpha = \frac{3}{8} \implies \sin\alpha = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 4 (8 poeng)

Oppgave. CO_2-utslipp i gram per km: $f(x) = 0{,}046x^2 - 6{,}7x + 386$, der x er farten i km/h. a) Tegn grafen for $x \in [20, 100]$. b) Finn grafisk og ved regning: 1) farten når utslippet er 150 g/km, 2) farten som gir minst utslipp og det minste utslippet. c) Bilen kjører 70 km/h i en halv time — hvor mye CO_2 slippes ut?

a) Grafen. f er en parabel som åpner oppover. Noen punkter for tegningen:

x	20	40	60	73	80	100
$f(x)$	270,4	191,6	150,6	≈ 142	145,4	176

Tegn en parabel med bunnpunkt nær $x \approx 73$.

b1) Utslipp 150 **g/km.** Løs $0{,}046x^2 - 6{,}7x + 386 = 150$, altså $0{,}046x^2 - 6{,}7x + 236 = 0$. Med abc-formelen:

$$x = \frac{6{,}7 \pm \sqrt{6{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}046 \cdot 236}}{2 \cdot 0{,}046} = \frac{6{,}7 \pm \sqrt{44{,}89 - 43{,}424}}{0{,}092}.$$

Dette gir $x \approx 59{,}7$ km/h og $x \approx 86{,}0$ km/h.

$$\boxed{x \approx 59{,}7 \text{ km/h} \quad \text{eller} \quad x \approx 86{,}0 \text{ km/h}}$$

(Grafisk: linjen $y = 150$ skjærer parabelen i disse to fartene.)

b2) Minst utslipp. Minimum ligger i bunnpunktet, der $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0{,}092x - 6{,}7 = 0 \implies x = \frac{6{,}7}{0{,}092} \approx 72{,}8 \text{ km/h}.$$

Minste utslipp:

$$f(72{,}8) \approx 0{,}046 \cdot 72{,}8^2 - 6{,}7 \cdot 72{,}8 + 386 \approx 142 \text{ g/km}.$$

$$\boxed{x \approx 72{,}8 \text{ km/h gir minst utslipp}, \quad \approx 142 \text{ g/km}}$$

c) CO_2 på en halvtime i 70 km/h. På en halv time i 70 km/h kjøres $70 \cdot \frac{1}{2} = 35$ km. Utslippet per km ved 70 km/h er

$$f(70) = 0{,}046 \cdot 70^2 - 6{,}7 \cdot 70 + 386 = 225{,}4 - 469 + 386 = 142{,}4 \text{ g/km}.$$

Totalt over 35 km:

$$142{,}4 \cdot 35 = 4984 \text{ g} \approx \boxed{5{,}0 \text{ kg } CO_2}.$$

Oppgave 5 (7 poeng)

Oppgave. Et tre kaster en 12 m lang skygge; en pinne på 1,2 m kaster samtidig en 1,6 m lang skygge. a) Hvor høyt er treet? b) Vis at solstrålene danner vinkel 36,9° med sletten. c) Beskriv hvordan Per og Kari kan måle helningsvinkelen u til en skråning. d) Med $u = 25°$ og et tre i skråningen som kaster en 17 m lang skygge nedover skråningen — hvor høyt er dette treet (treet står loddrett)?

a) Treets høyde. Treet og pinnen lager formlike trekanter (samme solvinkel). Forholdet høyde/skygge er likt:

$$\frac{h}{12} = \frac{1{,}2}{1{,}6} \implies h = 12 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}6} = 12 \cdot 0{,}75 = \boxed{9 \text{ m}}.$$

b) Solvinkelen. Vinkelen v mellom solstrålen og sletten finner vi fra pinnen (eller treet). I den rettvinklede trekanten er motstående katet høyden og hosliggende katet skyggen:

$$\tan v = \frac{1{,}2}{1{,}6} = 0{,}75 \implies v = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87° \approx \boxed{36{,}9°}.$$

(Samme svar med treet: $\tan v = \frac{9}{12} = 0{,}75$.)

c) Måling av helningsvinkelen u. Per og Kari kan legge planken vannrett ut fra det øverste punktet i skråningen (bruk f.eks. et vater eller hold planken så den peker vannrett mot horisonten). Med metermålet måler de hvor langt ned skråningen faller (loddrett nedstigning Δy) over en kjent vannrett lengde Δx langs planken. Da er

$$\tan u = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

og u leses av med kalkulatoren som $u = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. (Alternativt kan de måle hvor høyt over bakken planken treffer en loddrett stav et stykke ned skråningen.)

d) Treet i skråningen. Treet står loddrett, skyggen er 17 m nedover skråningen, og solvinkelen er fortsatt $v = 36{,}87^\circ$ med vannrett. Vi ser på trekanten med hjørnene treets topp T, treets fot B og skyggens ende S.

- $BS = 17$ m langs skråningen, som heller $u = 25^\circ$ under vannrett.
- Treet TB står loddrett. Vinkelen i B mellom det loddrette treet og skråningen (som går nedover) er $90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$.
- Solstrålen ST danner $36{,}87^\circ$ med vannrett. Fra S peker SB oppover skråningen (25° over vannrett), så vinkelen i S er $36{,}87^\circ - 25^\circ = 11{,}87^\circ$.
- Da blir vinkelen i T lik $180^\circ - 115^\circ - 11{,}87^\circ = 53{,}13^\circ$.

Sinussetningen gir treets høyde TB:

$$\frac{TB}{\sin S} = \frac{BS}{\sin T} \implies TB = \frac{17 \cdot \sin 11{,}87^\circ}{\sin 53{,}13^\circ} \approx \frac{17 \cdot 0{,}2058}{0{,}8} \approx \boxed{4{,}4 \text{ m}}.$$

Oppgave 6 (9 poeng)

Oppgave. En graf viser vanntemperaturen som funksjon av tiden (oppvarming, så avkjøling i kjøleskap). a) Les av: 1) temperaturen i springvannet, 2) hvor lenge de varmet vannet og temperaturen da det ble satt i kjøleskapet. b) Foreslå et funksjonsuttrykk for oppvarmingsdelen og finn tiden til $100\,^\circ$C. Avkjølingen er $f(x) = 115{,}82 \cdot 0{,}94^x + 5$ for $x \geq 5$. c) Finn ved regning når vannet er varmere enn $60\,^\circ$C. d) Hva var temperaturen i kjøleskapet?

a) Avlesning fra grafen.

1) Ved $x = 0$ starter grafen på ca. $15\,^\circ$C — det er temperaturen i springvannet.

$$\boxed{\text{Springvann} \approx 15\,^\circ\text{C}}$$

2) Grafen stiger til en topp på ca. $90\,^\circ$C ved $x = 5$ min, og deretter synker den (kjøleskapet). De varmet altså vannet i ca. 5 minutter, til ca. $90\,^\circ$C.

$$\boxed{\text{Oppvarming} \approx 5 \text{ min, til } \approx 90\,^\circ\text{C}}$$

(At toppen er $90\,^\circ$C ved $x = 5$ stemmer med avkjølingsmodellen: $f(5) = 115{,}82 \cdot 0{,}94^5 + 5 \approx 90{,}0$.)

b) Modell for oppvarming og tid til $100\,^\circ$C. Oppvarmingsdelen ser tilnærmet lineær ut, fra (0, 15) til (5, 90). Stigningstallet er

$$a = \frac{90 - 15}{5 - 0} = \frac{75}{5} = 15 \text{ (°C per min)},$$

så en rimelig modell er

$$g(x) = 15\,x + 15.$$

Tid til 100 °C med denne varmekilden (om vi varmer videre):

$$15\,x + 15 = 100 \implies x = \frac{85}{15} \approx 5{,}67 \text{ min} \approx \boxed{5 \text{ min } 40 \text{ s}}.$$

c) Når er temperaturen > 60 °C? Vannet passerer 60 °C to ganger: én gang på vei opp (oppvarmingen) og én gang på vei ned (avkjølingen). Vi tar med begge.

Oppvarmingen ($x \leq 5$, modellen $g(x) = 15x + 15$):

$$15x + 15 > 60 \implies 15x > 45 \implies x > 3.$$

Vannet er altså varmere enn 60 °C fra $x = 3$ og fram til toppen ved $x = 5$.

Avkjølingen ($x \geq 5$, modellen $f(x) = 115{,}82 \cdot 0{,}94^x + 5$):

$$115{,}82 \cdot 0{,}94^x + 5 > 60 \implies 0{,}94^x > \frac{55}{115{,}82} = 0{,}4749.$$

Ta logaritmen (husk: $\lg 0{,}94 < 0$, så ulikheten snur):

$$x \lg 0{,}94 > \lg 0{,}4749 \implies x < \frac{\lg 0{,}4749}{\lg 0{,}94} \approx 12{,}0.$$

Til sammen er vannet varmere enn 60 °C i hele tidsrommet

$$\boxed{3 < x < 12 \text{ min}}$$

altså i ca. 9 minutter (fra ca. 3 min på vei opp til ca. 12 min på vei ned).

d) Temperaturen i kjøleskapet. Når tiden vokser, går $0{,}94^x \to 0$, så

$$f(x) \to 0 + 5 = 5.$$

Den vannrette asymptoten er $y = 5$, og vannet kan ikke bli kaldere enn omgivelsene:

$$\boxed{\text{Kjøleskapet holdt} \approx 5\,^\circ\text{C}}$$

Oppgave 7 (8 poeng)

Oppgave. «Stein–saks–papir» mellom to spillere. a) Lag oversikt over alle ni utfall i ett spill. b) Forklar at sannsynligheten for at Bård vinner er $P(B) = \frac{1}{3}$. c) Hvor mange ulike resultater finnes når de spiller tre ganger? d) Sannsynligheten for at Bård vinner minst to av tre ganger. e) Med «best av tre» (flest seire vinner, ellers uavgjort): sannsynligheten for at Bård vinner totalt.

a) Alle ni utfall. Hver spiller velger Stein (St), Saks (Sa) eller Papir (Pa). Tabellen viser hvem som vinner (rad = Bård, kolonne = Lars):

Bård Lars	Stein	Saks	Papir
Stein	Uavgjort	Bård	Lars
Saks	Lars	Uavgjort	Bård
Papir	Bård	Lars	Uavgjort

Det er $3 \cdot 3 = 9$ like sannsynlige utfall.

b) P(Bård vinner) $= \frac{1}{3}$. Av de 9 utfallene gir 3 seier til Bård (de tre cellene merket «Bård» over), 3 gir seier til Lars, og 3 gir uavgjort. Av symmetri er hvert tilfelle like sannsynlig:

$$P(B) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Tilsvarende er $P(L) = \frac{1}{3}$ og $P(U) = \frac{1}{3}$.

c) Tre spill. Hvert spill har 3 mulige resultater (B, U eller L). Tre spill etter hverandre:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = \boxed{27 \text{ ulike resultater}}.$$

d) Bård vinner minst to av tre. Per spill er $P(B) = \frac{1}{3}$ og «ikke Bård» $= \frac{2}{3}$. Med binomisk modell:

$$P(\text{minst } 2) = P(2) + P(3) = \binom{3}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) + \binom{3}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3.$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{27} = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{7}{27} \approx 0{,}26}.$$

e) Bård vinner «best av tre». Bård vinner totalt dersom han vinner flere enkeltspill enn Lars. Vi teller blant de 27 like sannsynlige resultatene (hver av B, U, L for tre spill) hvor antall B er større enn antall L.

Med et lite program teller vi:

```
fra = "BUL"
gunstige = 0
for g1 in fra:
    for g2 in fra:
```

```
        for g3 in fra:
            s = g1 + g2 + g3
            if s.count("B") > s.count("L"):
                gunstige += 1
print(gunstige, "/ 27")   # 10 / 27
```

```
#include <iostream>
#include <string>
int main() {
    const std::string fra = "BUL";
    int gunstige = 0;
    for (char a : fra)
        for (char b : fra)
            for (char c : fra) {
                std::string s = {a, b, c};
                int nB = 0, nL = 0;
                for (char ch : s) { if (ch == 'B') ++nB; if (ch == 'L') ++nL; }
                if (nB > nL) ++gunstige;
            }
    std::cout << gunstige << " / 27\n";  // 10 / 27
    return 0;
}
```

Vi finner 10 gunstige resultater (av symmetri vinner Lars også i 10, og de 7 resterende er uavgjort totalt: $10 + 10 + 7 = 27$):

$$P(\text{Bård vinner}) = \boxed{\frac{10}{27} \approx 0{,}37}.$$

Oppgave 8 (4 poeng)

Oppgave. Ptolemaios' setning: for fire punkter A, B, C, D på en sirkel er $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. a) Bruk setningen på et rektangel $ABCD$ med sider a, b og diagonal c — hvilken berømt setning får du? b) For en likesidet trekant ABC innskrevet i en sirkel med et punkt P på buen mellom A og B: skriv Ptolemaios' setning og vis at $PC = PA + PB$.

a) Rektangel. I et rektangel $ABCD$ er motstående sider like, og begge diagonaler er like lange. Med sider a og b og diagonal c blir:

- $AC = BD = c$ (diagonalene)
- $AB = CD = a$ (det ene paret sider)
- $AD = BC = b$ (det andre paret sider)

Ptolemaios' setning $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ gir

$$c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b \implies \boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Dette er **Pytagoras' setning** (diagonalen er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter a og b).

b) Likesidet trekant. A, B, C er hjørner i en likesidet trekant med side s, og P ligger på buen mellom A og B. I firkanten $APBC$ (hjørner i rekkefølge A, P, B, C langs sirkelen) er diagonalene AB og PC. Ptolemaios' setning for firkanten $APBC$:

$$PC \cdot AB = PA \cdot BC + PB \cdot AC.$$

Siden trekanten er likesidet, er $AB = BC = AC = s$:

$$PC \cdot s = PA \cdot s + PB \cdot s.$$

Vi deler på s (som er > 0):

$$\boxed{PC = PA + PB}.$$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.