Matematikk 1T — Vår 2012

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

a) Regn ut

1) Regn ut $8 + 2 \cdot 3 - 3^2 - (10 - 12)^2$.

Vi følger regnerekkefølgen (parentes, potens, multiplikasjon, addisjon):

$$8 + 2 \cdot 3 - 3^2 - (10 - 12)^2 = 8 + 6 - 9 - (-2)^2 = 8 + 6 - 9 - 4 = \boxed{1}.$$

2) Regn ut $\dfrac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-3}}{\left(3^{-2}\right)^3}$.

Vi skriver alt som potenser av 3. Siden $9^{1/2} = (3^2)^{1/2} = 3^1$ og $\left(3^{-2}\right)^3 = 3^{-6}$:

$$\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-3}}{\left(3^{-2}\right)^3} = \frac{3^1 \cdot 3^{-3}}{3^{-6}} = \frac{3^{1-3}}{3^{-6}} = 3^{-2-(-6)} = 3^4 = \boxed{81}.$$

b) Standardform

Oppgave. Regn ut $5{,}5 \cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^6$ og skriv svaret på standardform.

$$5{,}5 \cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^6 = (5{,}5 \cdot 6{,}0) \cdot 10^{5+6} = 33 \cdot 10^{11} = \boxed{3{,}3 \cdot 10^{12}}.$$

c) Likningssystem

Oppgave. Løs systemet $x + 2y = 16$ og $3x - y = 6$.

Fra den andre likningen er $y = 3x - 6$. Sett inn i den første:

$$x + 2(3x - 6) = 16 \implies x + 6x - 12 = 16 \implies 7x = 28 \implies x = 4.$$

Da blir $y = 3 \cdot 4 - 6 = 6$.

$$\boxed{x = 4, \quad y = 6}$$

d) Løs grafisk

Oppgave. Løs likningen $2x - 3 = 6 - \frac{1}{4}x$ grafisk.

Vi tegner de to linjene $y_1 = 2x - 3$ og $y_2 = 6 - \frac{1}{4}x$ i samme koordinatsystem.

- $y_1 = 2x - 3$: stiger bratt, skjærer y-aksen i -3.
- $y_2 = 6 - \frac{1}{4}x$: synker svakt, skjærer y-aksen i 6.

Linjene krysser hverandre i punktet der $x = 4$ (og $y = 5$). Løsningen avleses fra x-verdien til skjæringspunktet:

$$\boxed{x = 4}$$

Kontroll: $2 \cdot 4 - 3 = 5$ og $6 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$. ✓

e) Løs ulikheten

Oppgave. Løs ulikheten $-x^2 - x + 12 \geq 0$.

Vi finner nullpunktene til $-x^2 - x + 12$. Multipliserer vi likningen $-x^2 - x + 12 = 0$ med -1, får vi $x^2 + x - 12 = 0$, altså

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \implies x = -4 \text{ eller } x = 3.$$

Parabelen $y = -x^2 - x + 12$ har negativ ledende koeffisient og åpner derfor **nedover**. Da er uttrykket positivt (eller null) *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-4 \leq x \leq 3}$$

f) Faktoriser og forkort

Oppgave. Faktoriser og forkort $\dfrac{-x^2 - x + 12}{x^2 - 9}$.

Fra e) er $-x^2 - x + 12 = -(x + 4)(x - 3)$. Nevneren er en konjugatsetning: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Da kan felles faktor $(x - 3)$ forkortes:

$$\frac{-x^2 - x + 12}{x^2 - 9} = \frac{-(x + 4)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \boxed{\frac{-(x + 4)}{x + 3}}, \qquad x \neq 3.$$

g) Sannsynlighet (fotball/håndball)

Oppgave. I en klasse på 20 elever spiller 15 fotball, 10 spiller håndball, og 1 spiller verken. Vi velger tilfeldig en av fotballspillerne. Finn sannsynligheten for at eleven også spiller håndball.

Antall som spiller minst én av idrettene er $20 - 1 = 19$. Med inklusjon–eksklusjon:

$$|F \cup H| = |F| + |H| - |F \cap H| \implies 19 = 15 + 10 - |F \cap H| \implies |F \cap H| = 6.$$

Altså spiller 6 elever begge deler. Blant de 15 fotballspillerne spiller 6 også håndball:

$$P(\text{håndball} \mid \text{fotball}) = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}.$$

h) Alderslikning (Siri, Karen, Marit)

Oppgave. De tre jentene er til sammen 26 år. Marit er tre ganger så gammel som Siri var for fire år siden. Karen er halvparten så gammel som Marit. Sett opp og løs en likning, og finn alderen til hver.

La s være Siris alder nå. For fire år siden var hun $s - 4$ år. Da er

$$\text{Marit} = 3(s-4), \qquad \text{Karen} = \tfrac{1}{2} \cdot 3(s-4) = \tfrac{3}{2}(s-4).$$

Summen er 26:

$$s + 3(s-4) + \tfrac{3}{2}(s-4) = 26.$$

Vi løser:

$$s + 3s - 12 + \tfrac{3}{2}s - 6 = 26 \implies \tfrac{11}{2}s - 18 = 26 \implies \tfrac{11}{2}s = 44 \implies s = 8.$$

Da blir Marit $= 3(8-4) = 12$ og Karen $= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

$$\boxed{\text{Siri 8 år,} \quad \text{Marit 12 år,} \quad \text{Karen 6 år}}$$

Kontroll: $8 + 12 + 6 = 26$. ✓

i) Rettvinklet trekant

Oppgave. Figuren viser en trekant ABC med rett vinkel i A, $\angle B = 45^\circ$ og $AB = 3$. **1)** Vis at $BC = 3\sqrt{2}$. **2)** Vis at $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Siden $\angle A = 90^\circ$ og $\angle B = 45^\circ$, blir $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Trekanten er likebeint med $AC = AB = 3$. Pytagoras gir

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \boxed{3\sqrt{2}}.$$

2) I den rettvinklede trekanten er $\angle B = 45^\circ$, med hosliggende katet $AB = 3$ og hypotenus $BC = 3\sqrt{2}$:

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - 2x + a$. Bestem a slik at: a) grafen skjærer y-aksen i $y = 2$, b) grafen har nullpunkt for $x = 3$, c) bunnpunktets y-verdi er -5, d) grafen har minst ett nullpunkt.

a) Skjæring med y-aksen er $f(0) = a$. Krav $f(0) = 2$:

$$\boxed{a = 2}$$

b) Nullpunkt for $x = 3$ betyr $f(3) = 0$:

$$3^2 - 2\cdot 3 + a = 0 \implies 9 - 6 + a = 0 \implies \boxed{a = -3}.$$

c) Bunnpunktet ligger der $x = -\dfrac{b}{2a_{\text{koeff}}} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. Bunnverdien er

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + a = a - 1.$$

Krav $a - 1 = -5$ gir

$$\boxed{a = -4}.$$

d) Grafen har minst ett nullpunkt når diskriminanten er ≥ 0. Med $b = -2$ og konstantledd a:

$$b^2 - 4\cdot 1\cdot a = (-2)^2 - 4a = 4 - 4a \geq 0 \implies 4 \geq 4a \implies \boxed{a \leq 1}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 3 (10 poeng)

Oppgave. Firkanten $ABCD$ har rett vinkel i A, med $AB = 24$ m, $AD = 18$ m, $DC = 24$ m og $CB = 16$ m. BD er en diagonal. a) Vis at $BD = 30$ m. b) Bestem $\angle ABD$ og $\angle BCD$. c) Bestem arealet av $ABCD$. d) Forklar at $\angle ABC \neq 90^\circ$.

a) Trekant ABD er rettvinklet i A. Pytagoras gir

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = \boxed{30 \text{ m}}.$$

b) $\angle ABD$ i den rettvinklede trekanten ABD (motstående katet $AD = 18$, hosliggende $AB = 24$):

$$\tan(\angle ABD) = \frac{AD}{AB} = \frac{18}{24} = 0{,}75 \implies \angle ABD = \tan^{-1}(0{,}75) \approx \boxed{36{,}9^\circ}.$$

$\angle BCD$ i trekant BCD med sidene $BD = 30$, $DC = 24$, $CB = 16$. Vinkelen ligger ved C, mellom CB og CD. Cosinussetningen:

$$\cos(\angle BCD) = \frac{CB^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot CB \cdot CD} = \frac{16^2 + 24^2 - 30^2}{2 \cdot 16 \cdot 24} = \frac{256 + 576 - 900}{768} = \frac{-68}{768} \approx -0{,}0885.$$

$$\angle BCD = \cos^{-1}(-0{,}0885) \approx \boxed{95{,}1^\circ}.$$

c) Arealet av firkanten er summen av de to trekantene som diagonalen deler den i.

Trekant ABD (rettvinklet i A):

$$A_{ABD} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \tfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216 \text{ m}^2.$$

Trekant BCD med to sider og mellomliggende vinkel $\angle BCD \approx 95{,}1^\circ$:

$$A_{BCD} = \tfrac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin(\angle BCD) = \tfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 24 \cdot \sin(95{,}1^\circ) \approx 191{,}2 \text{ m}^2.$$

Totalt areal:

$$A_{ABCD} = 216 + 191{,}2 \approx \boxed{407 \text{ m}^2}.$$

d) $\angle ABC$ er summen av de to delvinklene $\angle ABD$ og $\angle DBC$. Vi har $\angle ABD \approx 36{,}9^\circ$. Vinkelen $\angle DBC$ i trekant BCD (ved B) finner vi med cosinussetningen:

$$\cos(\angle DBC) = \frac{CB^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot CB \cdot BD} = \frac{16^2 + 30^2 - 24^2}{2 \cdot 16 \cdot 30} = \frac{256 + 900 - 576}{960} = \frac{580}{960} \approx 0{,}604,$$

så $\angle DBC \approx 52{,}8^\circ$. Da blir

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \approx 36{,}9^\circ + 52{,}8^\circ \approx 89{,}7^\circ \neq 90^\circ.$$

$$\boxed{\angle ABC \approx 89{,}7^\circ, \text{ altså ikke rett vinkel}}$$

Firkanten er derfor ikke et rektangel, selv om både AB og DC er 24 m.

Oppgave 4 (8 poeng)

Oppgave. Vekten (kg) til en gris ved alder x måneder er $f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}60x + 0{,}50$, for $x \in [0, 25]$. a) Tegn grafen og finn fødselsvekten. b) Alder når vekten er 20 kg, og gjennomsnittlig vektøkning per måned fram til da. c) Vekstfart når grisen er nøyaktig 12 måneder. d) Grisen slaktes når vekten øker med mindre enn 0,5 kg per måned — hvor gammel er den da?

a) Grafen er en parabel som åpner nedover (toppunkt der $f'(x) = 0$, altså $x = 26$ — utenfor intervallet, så f er voksende på hele $[0, 25]$). Fødselsvekten er verdien ved $x = 0$:

$$f(0) = -0{,}05 \cdot 0 + 2{,}60 \cdot 0 + 0{,}50 = \boxed{0{,}50 \text{ kg}}.$$

b) Vi løser $f(x) = 20$:

$$-0{,}05x^2 + 2{,}60x + 0{,}50 = 20 \implies -0{,}05x^2 + 2{,}60x - 19{,}50 = 0.$$

abc-formelen (eller graf/CAS) gir $x \approx 9{,}09$ eller $x \approx 42{,}9$. Bare den første ligger i $[0, 25]$:

$$x \approx \boxed{9{,}1 \text{ måneder}}.$$

Gjennomsnittlig vektøkning fra fødsel til denne alderen:

$$\frac{f(9{,}1) - f(0)}{9{,}1 - 0} = \frac{20 - 0{,}50}{9{,}1} \approx \boxed{2{,}1 \text{ kg/måned}}.$$

c) Vekstfarten er den deriverte:

$$f'(x) = -0{,}10x + 2{,}60.$$

Ved $x = 12$:

$$f'(12) = -0{,}10 \cdot 12 + 2{,}60 = -1{,}20 + 2{,}60 = \boxed{1{,}4 \text{ kg/måned}}.$$

d) Grisen slaktes når $f'(x) < 0{,}5$. Vi løser likhet:

$$-0{,}10x + 2{,}60 = 0{,}5 \implies -0{,}10x = -2{,}10 \implies x = 21.$$

For $x > 21$ er $f'(x) < 0{,}5$. Grisen slaktes altså når den er

$$\boxed{21 \text{ måneder gammel}}.$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. Karen har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker (10 totalt) i en skuff og trekker tilfeldig 2 sokker. a) P(to rosa). b) P(én rosa og én i annen farge). c) P(to like).

Antall måter å trekke 2 av 10 sokker (uten rekkefølge):

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

a) Det er bare $\binom{2}{2} = 1$ måte å få begge de rosa:

$$P(\text{to rosa}) = \frac{1}{45} \approx \boxed{0{,}022}.$$

b) Én rosa kan velges på 2 måter, og den andre sokken (annen farge enn rosa) på 8 måter:

$$P(\text{én rosa, én annen}) = \frac{2 \cdot 8}{45} = \frac{16}{45} \approx \boxed{0{,}36}.$$

c) «To like» betyr to av samme farge. Det finnes 5 farger, hver med nøyaktig $\binom{2}{2} = 1$ par:

$$P(\text{to like}) = \frac{5 \cdot 1}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9} \approx \boxed{0{,}11}.$$

Oppgave 6 (4 poeng)

Oppgave. 40 % av Norges befolkning over 15 år spiser matpakke til lunsj. Vi velger tilfeldig 50 personer over 15 år. a) P(nøyaktig 20) spiser matpakke. b) P(flere enn 15) spiser matpakke.

Dette er binomisk fordeling med $n = 50$ og $p = 0{,}40$. La X være antall som spiser matpakke.

a) $P(X = 20)$:

$$P(X = 20) = \binom{50}{20} 0{,}40^{20} \cdot 0{,}60^{30} \approx \boxed{0{,}115}.$$

b) «Flere enn 15» betyr $X \geq 16$, altså $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$. Med CAS/lommeregner:

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) \approx 1 - 0{,}0955 = \boxed{0{,}904}.$$

Oppgave 7 (4 poeng)

Oppgave. I området $ABDE$ er $AB = 10$ m, $BD = 12$ m og $DE = 12$ m. B og D er to hjørner i toppen (BD vannrett), A ligger rett under B og E rett under D. C er et vilkårlig punkt på BD med $BC = x$. a) Finn $AC + CE$ uttrykt med x. b) Bestem x slik at $AC + CE$ blir kortest mulig.

a) Vi legger inn koordinater med $B = (0, 0)$, $D = (12, 0)$, $A = (0, -10)$ og $E = (12, -12)$. Da er $C = (x, 0)$ med $BC = x$ og $CD = 12 - x$.

- AC er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter $BC = x$ og $AB = 10$:

$$AC = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}.$$

- CE er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter $CD = 12 - x$ og $DE = 12$:

$$CE = \sqrt{(12 - x)^2 + 12^2} = \sqrt{(12 - x)^2 + 144}.$$

Samlet avstand:

$$\boxed{S(x) = AC + CE = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{(12 - x)^2 + 144}}, \qquad 0 \le x \le 12.$$

b) Vi finner minimum ved å derivere S og sette $S'(x) = 0$ (eller bruke graf/CAS):

$$S'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{12 - x}{\sqrt{(12 - x)^2 + 144}} = 0.$$

Dette gir $x = \dfrac{60}{11} \approx 5{,}45$.

$$\boxed{x = \frac{60}{11}\ \text{m} \approx 5{,}5\ \text{m}}$$

Minste avstand blir da $S\left(\frac{60}{11}\right) = 2\sqrt{157} \approx 25{,}1$ m.

Geometrisk tolkning (speiling): Speiler vi A over linjen BD, ligger den korteste veien på en rett linje. Da gir formlike trekanter $\dfrac{x}{10} = \dfrac{12 - x}{12}$, altså $12x = 10(12 - x)$, som gir $22x = 120$ og $x = \frac{120}{22} = \frac{60}{11}$ — i samsvar med derivasjonen.

Oppgave 8 (4 poeng)

Oppgave. Grafen til den rasjonale funksjonen $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - d}$ er tegnet. Linja $x = 1$ er vertikal asymptote. Grafen har nullpunkter i $(-1, 0)$ og $(2, 0)$ og skjærer y-aksen i $(0, 2)$. Forklar at $d = 1$ og bestem a, b og c.

Forklaring av $d = 1$. En rasjonal funksjon har vertikal asymptote der nevneren er null (og telleren ikke er det). Nevneren $x - d$ er null for $x = d$. Siden den vertikale asymptoten er $x = 1$, må

$$d = 1.$$

Bestemme a, b og c. Nullpunktene til f er der telleren er null. Grafen har nullpunkter i $x = -1$ og $x = 2$, så telleren har disse røttene:

$$ax^2 + bx + c = a(x + 1)(x - 2).$$

Grafen går gjennom $(0, 2)$, altså $f(0) = 2$. Med $d = 1$:

$$f(0) = \frac{a(0+1)(0-2)}{0-1} = \frac{-2a}{-1} = 2a.$$

Krav $2a = 2$ gir $a = 1$. Da blir

$$ax^2 + bx + c = 1 \cdot (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2,$$

så $b = -1$ og $c = -2$.

$$\boxed{a = 1, \quad b = -1, \quad c = -2, \quad d = 1}$$

altså $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

Kontroll: $f(-1) = \dfrac{0}{-2} = 0$, $f(2) = \dfrac{0}{1} = 0$ og $f(0) = \dfrac{-2}{-1} = 2$. ✓
