Matematikk 1T — Vår 2013

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $\frac{750\,000}{0{,}005}$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi deler ved å gange teller og nevner med 1000 for å bli kvitt desimaltallet:

$$\frac{750\,000}{0{,}005} = \frac{750\,000 \cdot 1000}{0{,}005 \cdot 1000} = \frac{750\,000\,000}{5} = 150\,000\,000.$$

På standardform (ett siffer foran komma og en tierpotens):

$$\boxed{1{,}5 \cdot 10^8}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $2x + 3y = 7$ og $5x - 2y = 8$.

Løsning. Vi bruker addisjonsmetoden. Multipliser den første likningen med 2 og den andre med 3 for å eliminere y:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 14 \\ 15x - 6y &= 24 \end{aligned}$$

Legger vi sammen, faller y bort:

$$19x = 38 \implies x = 2.$$

Setter $x = 2$ inn i $2x + 3y = 7$: $4 + 3y = 7 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$.

$$\boxed{x = 2, \quad y = 1}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$.

Løsning. Vi faktoriserer teller og nevner. Telleren er en konjugatsetning, nevneren et fullstendig kvadrat:

$$x^2-16=(x-4)(x+4), \qquad x^2-8x+16=(x-4)^2.$$

Da forkorter vi felles faktor $(x-4)$ (forutsatt $x \neq 4$):

$$\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)^2}=\boxed{\frac{x+4}{x-4}}, \qquad x \neq 4.$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Bestem likningen for den rette linjen i koordinatsystemet (linjen går gjennom $(0,3)$ og $(6,0)$).

Løsning. Stigningstallet mellom de to punktene er

$$a=\frac{0-3}{6-0}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Linjen skjærer y-aksen i $(0,3)$, så konstantleddet er $b=3$. Dermed:

$$\boxed{y=-\tfrac{1}{2}x+3}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Oppgave. Sorter uttrykkene etter stigende verdi (forklar): $\sin 50^\circ$, $\lg 150$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $27^{1/3}$, $\sqrt{20}$, $\dfrac{1}{9}-3^{-2}$.

Løsning (uten hjelpemidler — vi bruker grenser, ikke kalkulator).

- $\dfrac{1}{9}-3^{-2}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}=0.$
- $\sin 50^\circ$: en sinusverdi for en spiss vinkel mellom 30° og 90°, så $\frac{1}{2}<\sin 50^\circ<1$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ (alt opphøyd i 0 er 1).
- $\lg 150$: siden $\lg 100=2$ og $\lg 1000=3$, ligger $2<\lg 150<3$.
- $27^{1/3}=\sqrt[3]{27}=3$ (eksakt, fordi $3^3=27$).
- $\sqrt{20}$: siden $4^2=16$ og $5^2=25$, er $4<\sqrt{20}<5$.

Vi sammenligner intervallene: $0<\sin 50^\circ<1<\lg 150<3=27^{1/3}<\sqrt{20}<5$. Det eneste som trenger ekstra omtanke er $\lg 150$ mot $27^{1/3}=3$: $\lg 150<3$, så $27^{1/3}$ er størst av disse to. Sortert i stigende rekkefølge:

$$\boxed{\frac{1}{9}-3^{-2} \;<\; \sin 50^\circ \;<\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \;<\; \lg 150 \;<\; 27^{1/3} \;<\; \sqrt{20}}$$

altså $0 < \sin 50^\circ < 1 < \lg 150 < 3 < \sqrt{20}$.

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Tre røde og to blå kuler i en eske; Sondre trekker tilfeldig to. Finn sannsynligheten for at de to kulene har samme farge.

Løsning. Vi trekker uten tilbakelegging. «Samme farge» betyr enten begge røde eller begge blå.

$$P(\text{begge røde}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$P(\text{begge blå}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Hendelsene utelukker hverandre, så vi adderer:

$$P(\text{samme farge}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

Oppgave 7 (8 poeng)

Oppgave. $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. a) Nullpunkter ved regning. b) Ekstremalpunkt ved regning. c) Skisse av grafen. d) Tangentens likning i $(-1, f(-1))$ ved regning, og tegn den.

a) Nullpunkter. Vi løser $-x^2 - 4x + 5 = 0$, eller likeverdig $x^2 + 4x - 5 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \implies x = 1 \text{ eller } x = -5.$$

$$\boxed{x = -5 \quad \text{og} \quad x = 1}$$

b) Ekstremalpunkt. Vi deriverer: $f'(x) = -2x - 4$. Ekstremalpunkt der $f'(x) = 0$:

$$-2x - 4 = 0 \implies x = -2.$$

$$f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 5 = -4 + 8 + 5 = 9.$$

Siden koeffisienten foran x^2 er negativ, åpner parabelen nedover, og punktet er et **toppunkt**:

$$\boxed{(-2,\, 9)}$$

c) Skisse. Parabelen åpner nedover med toppunkt $(-2, 9)$, nullpunkter i $x = -5$ og $x = 1$, og skjærer y-aksen i $f(0) = 5$. Symmetrilinjen er $x = -2$.

```
y
9          (-2,9)  toppunkt
         .   .
5      .       .  (0,5)
      .         .
     .           .
             x
 -5      -2        1
```

d) Tangent i $(-1,\ f(-1))$. Først $f(-1) = -1 + 4 + 5 = 8$, så punktet er $(-1, 8)$. Stigningstallet er

$$f'(-1) = -2(-1) - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Ettpunktsformelen $y - y_1 = a(x - x_1)$ gir

$$y - 8 = -2\,(x - (-1)) = -2(x + 1) \implies y = -2x - 2 + 8.$$

$$\boxed{y = -2x + 6}$$

Tangenten tegnes i samme koordinatsystem som i c); den tangerer parabelen i $(-1, 8)$ og har stigningstall -2 (skjærer y-aksen i 6).

Oppgave 8 (4 poeng)

Oppgave. To halvsirkler: den ene med sentrum O og radius $OA = r$ (over diameteren AB), den andre med sentrum D og radius AD (over diameteren AC). C ligger på den store halvsirkelen, $OC = r \perp AB$. a) Vis at $AC = r\sqrt{2}$. b) Vis ved regning at det blå området (Hippokrates-månen) har samme areal som $\triangle AOC$.

a) Plasser O i origo, $A = (-r, 0)$, $B = (r, 0)$. Siden $OC = r$ står vinkelrett på AB, er $C = (0, r)$. Da er

$$AC = \sqrt{(0 - (-r))^2 + (r - 0)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \boxed{r\sqrt{2}}.$$

(Alternativt: $\triangle AOC$ er rettvinklet i O med kateter $OA = OC = r$, så $AC = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$ ved Pytagoras.)

b) Vi setter opp arealene.

Den lille halvsirkelen har diameter $AC = r\sqrt{2}$, altså radius $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Arealet er

$$A_{\text{liten halvsirkel}} = \frac{1}{2}\,\pi \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\pi \cdot \frac{2r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Sirkelsegmentet mellom korden AC og den store buen AC er sektoren AOC minus trekanten AOC. Sentralvinkelen $\angle AOC = 90^\circ$, så sektoren er en kvartsirkel med radius r:

$$A_{\text{sektor } AOC} = \frac{1}{4}\,\pi r^2, \qquad A_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}\, r \cdot r = \frac{r^2}{2},$$

$$A_{\text{segment}} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}.$$

Månen er den lille halvsirkelen minus dette segmentet:

$$A_{\text{måne}} = \frac{\pi r^2}{4} - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2}.$$

Dette er nettopp arealet av $\triangle AOC$:

$$\boxed{A_{\text{måne}} = \frac{r^2}{2} = A_{\triangle AOC}.}$$

(Legg merke til at π faller bort — selv om månen er avgrenset av sirkelbuer, er arealet et «pent» tall. Dette er Hippokrates' måne.)

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. I en rettvinklet trekant er den lengste kateten 4,0 cm, og en av vinklene er 60°. Bestem den korteste kateten og hypotenusen ved regning.

Løsning. Vinklene er 90°, 60° og 30°. Den lengste kateten ligger motstående den største spisse vinkelen, altså motstående 60°. Den korteste kateten ligger motstående 30°.

Korteste katet (kall den k): den lengste kateten er hosliggende 60° og motstående 30°, så

$$\tan 60^\circ = \frac{4{,}0}{k} \implies k = \frac{4{,}0}{\tan 60^\circ} = \frac{4{,}0}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3 \text{ cm}.$$

Hypotenusen h (lengste kateten er motstående 60°):

$$\sin 60^\circ = \frac{4{,}0}{h} \implies h = \frac{4{,}0}{\sin 60^\circ} \approx 4{,}6 \text{ cm}.$$

$$\boxed{\text{Korteste katet} \approx 2{,}3 \text{ cm}, \quad \text{hypotenus} \approx 4{,}6 \text{ cm}}$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Oppgave. Firkant $ABCD$ med $AD = 5{,}0$, $DC = 4{,}0$, $CB = 6{,}0$, $\angle DAB = 60^\circ$ og $\angle DBA = 38{,}2^\circ$ (ved B, mot diagonalen BD). a) Bestem diagonalen BD ved regning. b) Bestem arealet av firkanten ved regning.

a) Diagonalen BD**.** Se på trekant ABD. Vi kjenner siden $AD = 5{,}0$ med motstående vinkel $\angle DBA = 38{,}2^\circ$, og $\angle DAB = 60^\circ$. Siden BD ligger motstående $\angle DAB = 60^\circ$, gir sinussetningen

$$\frac{BD}{\sin \angle DAB} = \frac{AD}{\sin \angle DBA} \implies BD = AD \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 38{,}2^\circ} = 5{,}0 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 38{,}2^\circ}.$$

$$BD \approx 5{,}0 \cdot \frac{0{,}8660}{0{,}6184} \approx \boxed{7{,}0}.$$

b) Arealet av firkanten. Diagonalen BD deler firkanten i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$.

Trekant ABD*:* Den tredje vinkelen er $\angle ADB = 180^\circ - 60^\circ - 38{,}2^\circ = 81{,}8^\circ$. Vi finner AB med sinussetningen, eller bruker arealformelen direkte. Først AB:

$$AB = AD \cdot \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle DBA} = 5{,}0 \cdot \frac{\sin 81{,}8^\circ}{\sin 38{,}2^\circ} \approx 8{,}00.$$

$$A_{\triangle ABD} = \tfrac{1}{2}\, AD \cdot AB \cdot \sin \angle DAB = \tfrac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 8{,}00 \cdot \sin 60^\circ \approx 17{,}3.$$

Trekant BCD*:* Vi kjenner $DC = 4{,}0$, $CB = 6{,}0$ og $BD \approx 7{,}0$. Vinkelen $\angle DCB$ finnes med cosinussetningen:

$$\cos \angle DCB = \frac{DC^2 + CB^2 - BD^2}{2 \cdot DC \cdot CB} = \frac{16 + 36 - 49}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3}{48} = 0{,}0625,$$

så $\angle DCB \approx 86{,}4^\circ$. Da blir

$$A_{\triangle BCD} = \tfrac{1}{2}\, DC \cdot CB \cdot \sin \angle DCB = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 86{,}4^\circ \approx 12{,}0.$$

Sum:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD} \approx 17{,}3 + 12{,}0 = \boxed{29{,}3}.$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. 4000 menn og 6000 kvinner; 8 % av mennene og 1 % av kvinnene er fargeblinde. a) Hvor mange fargeblinde, og sannsynligheten for at en tilfeldig deltaker er fargeblind. b) Blant de fargeblinde velges én tilfeldig — sannsynligheten for at det er en kvinne.

a) Antall fargeblinde:

$$\text{Menn: } 0{,}08 \cdot 4000 = 320, \qquad \text{Kvinner: } 0{,}01 \cdot 6000 = 60.$$

Til sammen $320 + 60 = 380$ fargeblinde av 10 000 deltakere. Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt deltaker er fargeblind:

$$P(\text{fargeblind}) = \frac{380}{10\,000} = 0{,}038 = \boxed{3{,}8\,\%}.$$

b) Av de 380 fargeblinde er 60 kvinner:

$$P(\text{kvinne} \mid \text{fargeblind}) = \frac{60}{380} = \frac{3}{19} \approx \boxed{0{,}158 = 15{,}8\,\%}.$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Én av tre Oslo-beboere ønsker å flytte. Vi velger tilfeldig 100 personer. a) Sannsynligheten for at nøyaktig 30 ønsker å flytte. b) Sannsynligheten for at mellom 30 og 50 ønsker å flytte.

Modell. La X være antall (av 100) som ønsker å flytte. Da er X binomisk fordelt med $n = 100$ og $p = \frac{1}{3}$.

a)

$$P(X = 30) = \binom{100}{30} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{30} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{70} \approx \boxed{0{,}067}.$$

b) Uttrykket «mellom 30 og 50» tolkes her *strengt* (endepunktene ikke medregnet), altså $30 < X < 50$, det vil si $31 \le X \le 49$:

$$P(31 \le X \le 49) = \sum_{k=31}^{49} \binom{100}{k} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{100-k} \approx \boxed{0{,}72}.$$

På kalkulator/CAS: binomcdf$(100, \frac{1}{3}, 49)$ − binomcdf$(100, \frac{1}{3}, 30) \approx 0{,}723$.

Merknad: «mellom 30 og 50» kan også tolkes inklusivt ($30 \le X \le 50$), som gir $\approx 0{,}79$. Begge tolkninger godtas vanligvis; fasiten bruker den strenge tolkningen ($\approx 0{,}72$).

Oppgave 5 (4 poeng)

Oppgave. 1000 personer; én av fem (= 200) vil trene i ferien; 21 % av mennene og 16 % av kvinnene vil trene. a) Sett opp et likningssystem for antall menn m og kvinner k. b) Hvor mange menn og kvinner deltok?

a) La m være antall menn og k antall kvinner. Til sammen er det 1000 deltakere, og antallet som vil trene er 200:

$$\boxed{\begin{aligned} m + k &= 1000 \\ 0{,}21\,m + 0{,}16\,k &= 200 \end{aligned}}$$

b) Fra første likning: $k = 1000 - m$. Settes inn i den andre:

$$0{,}21\,m + 0{,}16\,(1000 - m) = 200 \implies 0{,}05\,m + 160 = 200 \implies 0{,}05\,m = 40,$$

$$m = 800, \qquad k = 1000 - 800 = 200.$$

$$\boxed{\text{800 menn og 200 kvinner}}$$

Oppgave 6 (8 poeng)

Oppgave. $h(t) = 3{,}25t^3 - 50t^2 + 170t + 700$ modellerer hjortebestanden t år etter 1. januar 1990, for $t \in [0, 10]$. a) Tegn grafen. b) Når var bestanden størst, og hvor mange hjort? c) Løs $h(t) > 850$ grafisk og tolk. d) Bestem $h'(4)$ og tolk.

a) Graf. Grafen tegnes i digitalt verktøy (GeoGebra) for $t \in [0, 10]$. Den starter i $h(0) = 700$, stiger til en topp rundt $t \approx 2$, synker til et bunnpunkt rundt $t \approx 8$, og stiger litt igjen mot $t = 10$.

t	0	2	4	6	8	10
$h(t)$	700	866	788	622	524	650

b) Største bestand. Vi deriverer og setter lik null:

$$h'(t) = 9{,}75t^2 - 100t + 170 = 0.$$

abc-formelen gir $t \approx 2{,}15$ eller $t \approx 8{,}11$. Den første er et toppunkt (lokalt maksimum), den andre et bunnpunkt. Sammenlignet med endepunktene $h(0) = 700$ og $h(10) = 650$ er det største innenfor $[0, 10]$ i $t \approx 2{,}15$:

$$h(2{,}15) \approx 867.$$

Bestanden var størst ca. 2,2 år etter 1. januar 1990, altså rundt **våren 1992**, med ca. $\boxed{\text{867 hjort}}$.

c) Ulikheten $h(t) > 850$. Vi tegner linjen $y = 850$ i samme koordinatsystem og finner hvor grafen ligger over linjen. Skjæringspunktene (grafisk/CAS) er ved $t \approx 1{,}42$ og $t \approx 2{,}95$ (den tredje løsningen $t \approx 11{,}0$ ligger utenfor modellen). Altså:

$$h(t) > 850 \quad \text{for} \quad 1{,}4 < t < 2{,}9 \text{ (ca.)}.$$

Tolkning: Bestanden var større enn 850 hjort i et tidsrom på rundt halvannet år, fra omtrent midten av 1991 til slutten av 1992.

d) $h'(4)$.

$$h'(4) = 9{,}75 \cdot 16 - 100 \cdot 4 + 170 = 156 - 400 + 170 = \boxed{-74}.$$

Tolkning: 4 år etter 1. januar 1990 (altså i 1994) **sank** hjortebestanden med ca. 74 hjort per år.

Oppgave 7 (6 poeng)

Oppgave. Et rektangel $ABCD$ er innskrevet i en sirkel med sentrum S. a) Bestem radius dersom rektangelet har lengde 10,0 og bredde 5,0. b) Et rektangel med lengde $2x$ er innskrevet i en sirkel med radius 10; vis at arealet er $A(x) = 4x\sqrt{100 - x^2}$. c) Bestem det største arealet, og lengde og bredde i dette rektangelet.

a) Diagonalen i rektangelet er en diameter i sirkelen. Med Pytagoras:

$$d = \sqrt{10{,}0^2 + 5{,}0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Radien er halve diagonalen:

$$r = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx \boxed{5{,}6}.$$

b) La sentrum S være i origo. Halve lengden er x, slik at lengden er $2x$. Hjørnet ligger på sirkelen $x^2 + y^2 = 10^2$, der y er halve bredden:

$$y = \sqrt{100 - x^2} \implies \text{bredde} = 2y = 2\sqrt{100 - x^2}.$$

Arealet blir

$$A(x) = \text{lengde} \cdot \text{bredde} = 2x \cdot 2\sqrt{100 - x^2} = \boxed{4x\sqrt{100 - x^2}}.$$

c) Største areal. Vi deriverer (produkt- og kjerneregel):

$$A'(x) = 4\sqrt{100 - x^2} + 4x \cdot \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{4(100 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{400 - 8x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$A'(x) = 0$ når $400 - 8x^2 = 0$, altså $x^2 = 50$, $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$. Det største arealet er

$$A(5\sqrt{2}) = 4 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{100 - 50} = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 20\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 20 \cdot 5 \cdot 2 = \boxed{200}.$$

Lengde og bredde:

$$\text{lengde} = 2x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1, \qquad \text{bredde} = 2\sqrt{100 - 50} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1.$$

Det optimale rektangelet er altså et **kvadrat** med side $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$.

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Start med en brøk $\dfrac{c}{d}$. Legg til 7 ganger nevneren i både teller og nevner; du får en ny brøk. Trekk den nye brøken fra den opprinnelige; uttrykket skal være lik 8. Hva må $\dfrac{c}{d}$ ha vært?

Løsning. Den nye brøken er $\dfrac{c+7d}{d+7d} = \dfrac{c+7d}{8d}$. Vi trekker den fra den opprinnelige:

$$\frac{c}{d} - \frac{c+7d}{8d} = \frac{8c}{8d} - \frac{c+7d}{8d} = \frac{8c-c-7d}{8d} = \frac{7c-7d}{8d} = \frac{7(c-d)}{8d}.$$

Dette skal være lik 8:

$$\frac{7(c-d)}{8d} = 8 \implies 7(c-d) = 64d \implies 7c = 64d + 7d = 71d \implies \frac{c}{d} = \frac{71}{7}.$$

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{71}{7}}$$

Kontroll: Med $\frac{c}{d} = \frac{71}{7}$ er den nye brøken $\frac{71+7\cdot 7}{8\cdot 7} = \frac{120}{56} = \frac{15}{7}$, og differansen $\frac{71}{7} - \frac{15}{7} = \frac{56}{7} = 8$. ✓

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.