Matematikk 1T — Vår 2015

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $\dfrac{7{,}5 \cdot 10^{15}}{0{,}003}$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi deler tallene og potensene hver for seg. Skriv $0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3}$:

$$\frac{7{,}5 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{7{,}5}{3} \cdot 10^{15-(-3)} = 2{,}5 \cdot 10^{18}.$$

$$\boxed{2{,}5 \cdot 10^{18}}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $x + 6y = 1$ og $2x + 4y = -6$.

Løsning. Fra den første likningen er $x = 1 - 6y$. Sett inn i den andre:

$$2(1 - 6y) + 4y = -6 \implies 2 - 12y + 4y = -6 \implies -8y = -8 \implies y = 1.$$

Da blir $x = 1 - 6 \cdot 1 = -5$.

$$\boxed{x = -5, \quad y = 1}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Løsning. Vi finner nullpunktene til $x^2 - 3x - 10$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \implies x = -2 \text{ eller } x = 5.$$

Så $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er positivt *utenfor* nullpunktene:

$$\boxed{x < -2 \text{ eller } x > 5}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv svaret så enkelt som mulig. a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 8^0 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt[4]{16}$. b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$.

a) Vi regner faktor for faktor:

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2, \qquad 8^0 = 1, \qquad 2^{-1} = \tfrac{1}{2}, \qquad \sqrt[4]{16} = 2.$$

Da blir

$$4^{\frac{1}{2}} \cdot 8^0 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt[4]{16} = 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{2}.$$

b) Bruk at $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ og $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6, \qquad \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = 6 + 3 = \boxed{9}.$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $\lg(x^2 - 0{,}9) = -1$.

Løsning. Per definisjon av tierlogaritmen er $\lg(u) = -1 \Leftrightarrow u = 10^{-1} = 0{,}1$. Dermed

$$x^2 - 0{,}9 = 0{,}1 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Begge gir et positivt argument inni logaritmen ($x^2 - 0{,}9 = 0{,}1 > 0$), så begge er gyldige.

$$\boxed{x = -1 \text{ eller } x = 1}$$

Oppgave 6 (1 poeng)

Oppgave. Bestem b slik at $x^2 + bx + 16$ blir et fullstendig kvadrat.

Løsning. Et fullstendig kvadrat har formen $(x+c)^2 = x^2 + 2cx + c^2$. Sammenlign konstantleddene: $c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4$. Da blir $b = 2c$:

$$\boxed{b = 8 \text{ eller } b = -8}$$

(Sjekk: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ og $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.)

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $2x(x-2) - (x-2)(2x+1)$.

Løsning. Begge ledd har felles faktor $(x-2)$:

$$2x(x-2) - (x-2)(2x+1) = (x-2)\big[\,2x - (2x+1)\,\big] = (x-2)(-1) = -(x-2).$$

$$\boxed{2-x}$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{x^2 - 12x + 36}{2x^2 - 72}$.

Løsning. Faktoriser teller og nevner. Telleren er et fullstendig kvadrat, og nevneren har felles faktor 2:

$$x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2, \qquad 2x^2 - 72 = 2(x^2 - 36) = 2(x-6)(x+6).$$

Forkort med $(x-6)$:

$$\frac{(x-6)^2}{2(x-6)(x+6)} = \boxed{\frac{x-6}{2(x+6)}}.$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Oppgave. En rett linje går gjennom punktene $(-1, 2)$ og $(3, 4)$. Bestem likningen ved regning.

Løsning. Stigningstallet er

$$a = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Sett inn punktet $(-1, 2)$ i $y = ax + b$:

$$2 = \tfrac{1}{2} \cdot (-1) + b \implies b = 2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}.$$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}}$$

Oppgave 10 (5 poeng)

Oppgave. To rettvinklede trekanter er gitt. $\triangle ABC$ har $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$, rett vinkel i B, hypotenus $AC = 2$ og katet $BC = 1$. $\triangle DEF$ har $\angle D = \angle F = 45°$, rett vinkel i E, og kateter $DE = EF = 1$. a) Bestem eksakte verdier for AB og DF. b) Fyll ut tabellen med eksakte verdier for $\sin u$, $\cos u$, $\tan u$ for $u = 30°, 45°, 60°$.

a) I $\triangle ABC$ er AB den siste kateten. Pytagoras gir

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

I $\triangle DEF$ er DF hypotenusen. Pytagoras gir

$$DF = \sqrt{DE^2 + EF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

b) Vi leser av forholdene i trekantene. I $\triangle ABC$ (med $AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$) er BC motstående $\angle A = 30°$ og AB motstående $\angle C = 60°$. I $\triangle DEF$ er begge kateter 1 og hypotenus $\sqrt{2}$.

u	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

For eksempel: $\tan 30° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, og $\sin 60° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Oppgave 11 (5 poeng)

Oppgave. Ni smoothieflasker: 2 «Surf», 3 «Jump», 4 «Catch». Du trekker tilfeldig 2 flasker. a) P(ingen Jump). b) P(én Surf og én Catch). c) P(to like).

Grunnlag. Antall måter å trekke 2 av 9 flasker er $\binom{9}{2} = 36$.

a) «Ingen Jump» betyr at begge trekkes blant de $2 + 4 = 6$ ikke-Jump-flaskene:

$$P(\text{ingen Jump}) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

b) Velg én av 2 Surf og én av 4 Catch:

$$P(\text{1 Surf og 1 Catch}) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{2 \cdot 4}{36} = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}.$$

c) «To like» betyr to Surf, to Jump eller to Catch:

$$P(\text{to like}) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1+3+6}{36} = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18}}.$$

Oppgave 12 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. a) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og koordinataksene ved regning. b) Tegn grafen for $x \in [-2, 4]$. c) $g(x) = 2x + 2$; løs $f(x) = g(x)$ grafisk.

a) *Skjæring med y-aksen* ($x = 0$): $f(0) = 6$, altså punktet $(0, 6)$.

Skjæring med x-aksen ($f(x) = 0$): vi løser $-2x^2 + 4x + 6 = 0$, eller $x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \implies x = -1 \text{ eller } x = 3.$$

Skjæringspunktene blir

$$\boxed{(-1,\, 0), \quad (3,\, 0) \quad \text{og} \quad (0,\, 6)}.$$

b) Parabelen åpner nedover (negativ andregradskoeffisient). Toppunktet ligger i $x = -\dfrac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$, med $f(1) = -2 + 4 + 6 = 8$, altså $(1, 8)$. Tegn en glatt parabel gjennom $(-2, -10)$, $(-1, 0)$, $(0, 6)$, $(1, 8)$, $(3, 0)$ og $(4, -10)$.

c) Tegn linjen $g(x) = 2x + 2$ i samme koordinatsystem. Skjæringspunktene mellom de to grafene gir løsningen. Ved regning (til kontroll) løser vi $-2x^2 + 4x + 6 = 2x + 2$, dvs. $2x^2 - 2x - 4 = 0$, dvs. $x^2 - x - 2 = 0 = (x-2)(x+1)$, så $x = -1$ og $x = 2$. Avlest grafisk:

$$\boxed{x = -1 \text{ eller } x = 2}.$$

Oppgave 13 (2 poeng)

Oppgave. Et stramt tau ligger rundt jordas ekvator (jorda tenkt som kule). Tauet forlenges med 20 m og legges som en konsentrisk sirkel. Kan du gå under tauet?

Løsning. La jordradien være r. Da er ekvatorlengden $2\pi r$. Det nye tauet har lengde $2\pi r + 20$ og radius R der $2\pi R = 2\pi r + 20$. Avstanden fra bakken opp til tauet er

$$R - r = \frac{2\pi r + 20}{2\pi} - r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18 \text{ m}.$$

Avstanden er uavhengig av jordradien. Siden $\dfrac{10}{\pi} \approx 3{,}2$ m er langt mer enn en menneskehøyde,

$$\boxed{\text{ja — du kan gå under tauet (klaring} \approx 3{,}2 \text{ m).}}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Oppgave. Antall «liker» x dager etter 31. mars er $f(x) = 80 \cdot 1{,}045^{\,x}$ ($x = 0$ er 31. mars). a) Hvor mange likte siden før 1. april, og hvor mange prosent øker antallet per dag? b) Passerer antallet 1000 innen utgangen av mai? c) Bestem $f(16)$ og $f'(16)$ og forklar hva de forteller.

a) «Før 1. april» svarer til $x = 0$:

$$f(0) = 80 \cdot 1{,}045^{\,0} = 80.$$

Vekstfaktoren er 1,045, som betyr en daglig økning på $\boxed{\text{80 personer, og 4,5 % vekst per dag}}$.

b) Utgangen av mai svarer til $x = 61$ (30 dager i april gir $x = 30$ for 30. april, og 31 dager i mai gir $x = 61$ for 31. mai). Vi regner

$$f(61) = 80 \cdot 1{,}045^{\,61} \approx 1173.$$

Løser vi $80 \cdot 1{,}045^{\,x} = 1000$, får vi $x = \dfrac{\lg(1000/80)}{\lg 1{,}045} \approx 57{,}4$, altså passeres 1000 rundt 27. mai.

$$\boxed{\text{Ja — antallet passerer 1000 i slutten av mai } (f(61) \approx 1173).}$$

c) Med $f(x) = 80 \cdot 1{,}045^{\,x}$ er $f'(x) = 80 \cdot 1{,}045^{\,x} \cdot \ln 1{,}045$. Da blir

$$f(16) = 80 \cdot 1{,}045^{16} \approx 162, \qquad f'(16) = f(16) \cdot \ln 1{,}045 \approx 7{,}1.$$

$$\boxed{f(16) \approx 162, \quad f'(16) \approx 7{,}1}$$

Tolkning: 16 dager etter 31. mars (altså 16. april) hadde om lag 162 personer klikket «liker», og antallet vokste da med om lag 7,1 nye «liker» per dag.

Oppgave 2 (5 poeng)

Oppgave. Firkanten $ABCD$ med diagonal $BD = 8$. Av figuren: rett vinkel i C, $\angle BDC = 30^\circ$ (over diagonalen), $\angle DAB = 30^\circ$ og $\angle DBA = 45^\circ$ (under diagonalen). Bruk CAS til å bestemme sidene eksakt.

Løsning. Diagonalen BD deler firkanten i to trekanter: $\triangle BCD$ over og $\triangle ABD$ under.

Trekant BCD (rett vinkel i C, $\angle BDC = 30^\circ$, hypotenus $BD = 8$):

$$CD = BD \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \qquad BC = BD \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Trekant ABD ($\angle DAB = 30^\circ$, $\angle DBA = 45^\circ$, dermed $\angle ADB = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$). Sinussetningen med $BD = 8$ motstående $\angle DAB = 30^\circ$:

$$AB = BD \cdot \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 8 \cdot \frac{\sin 105^\circ}{1/2} = 16 \sin 105^\circ = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6},$$

$$AD = BD \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\boxed{BC = 4, \quad CD = 4\sqrt{3}, \quad AB = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}, \quad AD = 8\sqrt{2}}$$

CAS-kontroll (numerisk): $AB \approx 15{,}45$ og $AD \approx 11{,}31$.

Oppgave 3 (9 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 18$. a) Tegn grafen og bestem nullpunkter samt topp-/bunnpunkt med graftegner. b) Bestem eksakte verdier for det samme med CAS. Grafen har to tangenter med stigningstall 3. c) Bestem likningene for de to tangentene. d) Tegn tangentene i samme koordinatsystem.

a) Med graftegner ser man at f har tre nullpunkter, et toppunkt og et bunnpunkt:

- Nullpunkter: $x \approx -1{,}37$, $x = 3$, $x \approx 4{,}37$.
- Toppunkt: $(0{,}27,\ 18{,}39)$.
- Bunnpunkt: $(3{,}73,\ -2{,}39)$.

b) *Nullpunkter (CAS):* $x = 3$ er en rot (sjekk: $27 - 54 + 9 + 18 = 0$). Polynomdivisjon med $(x - 3)$ gir $x^2 - 3x - 6$, med røtter

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

$$\boxed{x = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}, \quad x = 3, \quad x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}}$$

Topp-/bunnpunkt: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 3 = 3(x^2 - 4x + 1)$. Sett lik null:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Toppunkt i $x = 2 - \sqrt{3}$ med $f(2 - \sqrt{3}) = 8 + 6\sqrt{3}$, og bunnpunkt i $x = 2 + \sqrt{3}$ med $f(2 + \sqrt{3}) = 8 - 6\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{Toppunkt } \left(2 - \sqrt{3},\ 8 + 6\sqrt{3}\right), \quad \text{Bunnpunkt } \left(2 + \sqrt{3},\ 8 - 6\sqrt{3}\right)}$$

c) Tangenter med stigningstall 3 finnes der $f'(x) = 3$:

$$3x^2 - 12x + 3 = 3 \implies 3x^2 - 12x = 0 \implies 3x(x - 4) = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

- For $x = 0$: $f(0) = 18$. Tangent: $y = 3(x - 0) + 18 = 3x + 18$.

- For $x = 4$: $f(4) = 64 - 96 + 12 + 18 = -2$. Tangent: $y = 3(x-4) - 2 = 3x - 14$.

$$\boxed{y = 3x + 18 \qquad \text{og} \qquad y = 3x - 14}$$

d) Tegn de to rette linjene $y = 3x + 18$ og $y = 3x - 14$ i samme koordinatsystem som f. De er parallelle (begge stigningstall 3) og tangerer grafen i henholdsvis $(0, 18)$ og $(4, -2)$.

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Liten kuleis: 24 kr, 2 iskremkuler. Stor kuleis: 32 kr, 3 iskremkuler. 1 L iskrem = 12 kuler. En dag solgte Ida for 2752 kr og brukte 20 L iskrem. Hvor mange store kuleis solgte hun?

Løsning. La s = antall små og t = antall store kuleis. Inntekt og iskremforbruk (20 L = 240 kuler) gir likningssystemet

$$\begin{aligned} 24s + 32t &= 2752 \qquad &&\text{(kroner)} \\ 2s + 3t &= 240 &&\text{(iskremkuler)} \end{aligned}$$

Fra den nederste: $s = \dfrac{240 - 3t}{2} = 120 - 1{,}5t$. Sett inn i den øverste:

$$24(120 - 1{,}5t) + 32t = 2752 \implies 2880 - 36t + 32t = 2752 \implies -4t = -128 \implies t = 32.$$

(Da blir $s = 120 - 1{,}5 \cdot 32 = 72$.)

$$\boxed{\text{Ida solgte 32 store kuleis (og 72 små).}}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Oppgave. En sirkel har diameter $AD = a$. Punktene B og C deler AD i tre like store deler. Alle buene i figuren er sirkelbuer, og figuren danner et «tao»-mønster (en svart komma-formet del). Bestem forholdet mellom arealet av hele sirkelen og arealet av det svarte området.

Løsning. Sett $A = 0$, $B = \frac{a}{3}$, $C = \frac{2a}{3}$, $D = a$ langs diameteren.

Den store sirkelen har diameter a, altså radius $\frac{a}{2}$, og areal

$$A_{\text{sirkel}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Den svarte komma-figuren bygges av halvsirkler. Den ytre buen følger en halvsirkel med diameter $AC = \frac{2a}{3}$ (radius $\frac{a}{3}$), mens den indre buen følger en halvsirkel med diameter $AB = \frac{a}{3}$ (radius $\frac{a}{6}$). Det svarte arealet er differansen mellom disse to (de to halvsirklene på hver side av diameteren paret sammen):

$$A_{\text{svart}} = \pi \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{\pi a^2}{36} = \frac{4\pi a^2 - \pi a^2}{36} = \frac{3\pi a^2}{36} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Forholdet mellom hele sirkelen og det svarte området blir

$$\frac{A_{\text{sirkel}}}{A_{\text{svart}}} = \frac{\pi a^2/4}{\pi a^2/12} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$\boxed{\text{Forholdet er } 3:1 \text{ — sirkelen er tre ganger så stor som det svarte området.}}$$
