Matematikk 1T — Vår 2017

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut $\dfrac{0{,}72 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^{-8}}$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi deler tallene for seg og potensene for seg:

$$\frac{0{,}72 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^{-8}} = \frac{0{,}72}{60} \cdot 10^{\,8-(-8)} = 0{,}012 \cdot 10^{16}.$$

Skriver vi $0{,}012 = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$, blir

$$0{,}012 \cdot 10^{16} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{16} = \boxed{1{,}2 \cdot 10^{14}}.$$

Oppgave 2 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $4^0 + 2^{-3} \cdot (2^3)^2$.

Løsning. Bruk potensreglene $4^0 = 1$, $(2^3)^2 = 2^6$ og $2^{-3} \cdot 2^6 = 2^3$:

$$4^0 + 2^{-3} \cdot 2^6 = 1 + 2^3 = 1 + 8 = \boxed{9}.$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv så enkelt som mulig: $\sqrt{20} + \sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}}$.

Løsning. Vi forenkler hvert ledd. For det første er $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$. For det siste leddet bruker vi $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{160}{2}} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$. Dermed

$$\sqrt{20}+\sqrt{5}-\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(2+1-4)\sqrt{5}=\boxed{-\sqrt{5}}.$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $x^2+y^2=4$ og $x+2=y$.

Løsning. Sett inn $y=x+2$ fra den andre likningen i den første:

$$x^2+(x+2)^2=4 \implies x^2+x^2+4x+4=4 \implies 2x^2+4x=0.$$

Faktoriser: $2x(x+2)=0$, så $x=0$ eller $x=-2$. Tilhørende y-verdier fra $y=x+2$:

- $x=0 \ \Rightarrow\ y=2$
- $x=-2 \ \Rightarrow\ y=0$

$$\boxed{(0,\,2) \quad \text{og} \quad (-2,\,0)}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $\lg\!\left(x^2+\frac{3}{4}\right)=0$.

Løsning. $\lg a=0$ betyr $a=10^0=1$. Altså

$$x^2+\frac{3}{4}=1 \implies x^2=\frac{1}{4} \implies x=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{x=-\tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x=\tfrac{1}{2}}$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-5}{x-1}-\dfrac{2x-6}{x^2-x}$.

Løsning. Vi faktoriserer nevnerne: $x^2-x=x(x-1)$. Fellesnevner er $x(x-1)$:

$$\frac{1}{x}+\frac{x-5}{x-1}-\frac{2x-6}{x(x-1)}=\frac{(x-1)+x(x-5)-(2x-6)}{x(x-1)}.$$

Vi regner ut telleren:

$$(x-1)+(x^2-5x)-(2x-6)=x^2+(1-5-2)x+(-1+6)=x^2-6x+5.$$

Telleren faktoriseres: $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$. Dermed

$$\frac{(x-1)(x-5)}{x(x-1)}=\frac{x-5}{x}=\boxed{\frac{x-5}{x}}.$$

Oppgave 7 (4 poeng)

Oppgave. Ved en skole leser 80 % aviser på nett, 50 % leser papiraviser og 2 % leser ikke aviser i det hele tatt. a) Systematiser i venndiagram/krysstabell. b) Sannsynlighet for at en tilfeldig elev leser *både* på nett og papir. c) Gitt at en elev leser på nett: sannsynligheten for at eleven *ikke* leser papiraviser.

a) og b) La N være «leser på nett» og P «leser papir». Da er $P(N) = 0{,}80$, $P(P) = 0{,}50$ og $P(\text{ikke aviser}) = 0{,}02$, slik at $P(N \cup P) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Addisjonssetningen gir

$$P(N \cap P) = P(N) + P(P) - P(N \cup P) = 0{,}80 + 0{,}50 - 0{,}98 = \boxed{0{,}32}.$$

Krysstabell (andeler av alle elever):

	Papir	Ikke papir	Sum
Nett	0,32	0,48	0,80
Ikke nett	0,18	0,02	0,20
Sum	0,50	0,50	1,00

c) Vi skal finne $P(\text{ikke papir} \mid N)$. Av tabellen leser 0,48 av alle elever på nett uten papir, og 0,80 leser på nett:

$$P(\overline{P} \mid N) = \frac{P(N \cap \overline{P})}{P(N)} = \frac{0{,}48}{0{,}80} = \boxed{0{,}6}.$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant har korteste side 20, og differansen mellom de to andre sidene er 2. Hvor lang er den lengste siden?

Løsning. Den lengste siden i en rettvinklet trekant er hypotenusen. La den ene kateten være 20, den andre kateten a og hypotenusen $a + 2$ (differansen mellom de to lengste er 2). Pytagoras:

$$20^2 + a^2 = (a + 2)^2 \implies 400 + a^2 = a^2 + 4a + 4 \implies 4a = 396 \implies a = 99.$$

Hypotenusen er $a + 2 = 99 + 2 = 101$. (Sjekk: $20^2 + 99^2 = 400 + 9801 = 10201 = 101^2$. ✓)

$$\boxed{\text{Den lengste siden er } 101}$$

Oppgave 9 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 3$. a) Gjennomsnittlig vekstfart i $[-2, 0]$. b) Momentan vekstfart i $x = -2$.

a) Gjennomsnittlig vekstfart er $\dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$. Vi regner

$$f(0) = -3, \qquad f(-2) = (-8) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) - 3 = -8 + 12 + 4 - 3 = 5.$$

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2} = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = \boxed{-4}.$$

b) Momentan vekstfart er den deriverte. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$, så

$$f'(-2) = 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) - 2 = 12 - 12 - 2 = \boxed{-2}.$$

Oppgave 10 (2 poeng)

Oppgave. Grafen til en tredjegradsfunksjon f er tegnet. Grafen har nullpunkter i $x = 1$ og $x = 4$ (toppunkt $(1, 0)$, bunnpunkt om lag $(3, -4)$). Bruk grafen til å løse a) $f(x) > 0$ og b) $f'(x) > 0$.

a) $f(x) > 0$ der grafen ligger *over* x-aksen. Grafen tangerer aksen i $x = 1$ (toppunkt på aksen, så $f = 0$ der) og krysser i $x = 4$. For $x < 4$ er grafen ≤ 0 (den berører bare aksen i $x = 1$), og for $x > 4$ er den positiv. Altså

$$\boxed{f(x) > 0 \quad \text{for} \quad x > 4}.$$

b) $f'(x) > 0$ der grafen *stiger*. Grafen stiger fram til toppunktet i $x = 1$, synker mellom toppunktet og bunnpunktet i $x = 3$, og stiger igjen etter $x = 3$. Altså

$$\boxed{f'(x) > 0 \quad \text{for} \quad x < 1 \;\; \text{eller} \;\; x > 3}.$$

Oppgave 11 (8 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - 4x + 3$. a) Nullpunkter. b) Tegn grafen og symmetrilinjen ℓ. c) Likningen for tangenten med stigningstall 2. d) Tangenten i c) skjærer ℓ i P; skisser den *andre* tangenten gjennom P og finn likningen grafisk. e) Vis ved regning at svaret i d) stemmer.

a) Nullpunktene løses med abc-formelen eller faktorisering: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$, så

$$\boxed{x = 1 \quad \text{og} \quad x = 3}.$$

b) Parabelen åpner oppover. Symmetrilinjen går gjennom bunnpunktet. Bunnpunktets x-verdi er midt mellom nullpunktene: $x = \dfrac{1+3}{2} = 2$, og $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$, så bunnpunktet er $(2, -1)$. Symmetrilinjen er

$$\boxed{\ell: \; x = 2}.$$

Tegn parabelen med nullpunkter $(1, 0)$ og $(3, 0)$, bunnpunkt $(2, -1)$ og skjæring med y-aksen i $(0, 3)$, sammen med den loddrette linjen $x = 2$.

c) Tangentens stigningstall er $f'(x) = 2x - 4$. Vi setter $f'(x) = 2$:

$$2x - 4 = 2 \implies x = 3.$$

Tangeringspunktet er $(3, f(3)) = (3, 0)$. Tangentlikningen $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ med $a = 3$:

$$y = 2(x-3) + 0 = 2x - 6. \qquad \boxed{y = 2x - 6}$$

Tegn denne rette linjen i samme koordinatsystem.

d) Tangenten $y = 2x - 6$ skjærer $\ell : x = 2$ der $y = 2 \cdot 2 - 6 = -2$, så $P = (2, -2)$. Av symmetrien om $x = 2$ må den andre tangenten gjennom P være speilbildet av tangenten i c). Den tangerer i $x = 1$ (speilbildet av $x = 3$) og har stigningstall -2. Grafisk leser vi av likningen

$$\boxed{y = -2x + 2}.$$

e) Vi kontrollerer ved regning. En tangent i punktet $x = a$ har likning $y = (2a-4)(x-a)+(a^2-4a+3)$. Krav: den går gjennom $P = (2, -2)$:

$$(2a-4)(2-a) + a^2 - 4a + 3 = -2.$$

Venstresiden forenkles til $-2a^2 + 8a - 8 + a^2 - 4a + 3 = -a^2 + 4a - 5$. Likningen blir

$$-a^2 + 4a - 5 = -2 \implies a^2 - 4a + 3 = 0 \implies (a-1)(a-3) = 0,$$

så $a = 1$ eller $a = 3$. Verdien $a = 3$ er tangenten fra c). Den *andre* tangenten har $a = 1$: stigningstall $f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$ og punkt $(1, f(1)) = (1, 0)$, altså $y = -2(x-1) = -2x + 2$. Dette stemmer med svaret i d). ✓

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

Oppgave 12 (5 poeng)

Oppgave. Figuren viser den rettvinklede trekanten PQR med hypotenus $PR = 2$, $QR = 1$, $\angle P = 30^\circ$ og $\angle R = 60^\circ$. a) Bruk $\triangle PQR$ til å vise at $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. I $\triangle ABC$ er $AB = 2$, $AC = 4$, $\angle A = 30^\circ$. b) Arealet av $\triangle ABC$. c) Vis at $BC = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

a) I den rettvinklede trekanten PQR er $\angle Q = 90^\circ$, hypotenusen $PR = 2$ og kateten $QR = 1$ (motstående $\angle P = 30^\circ$). Den siste kateten finnes med Pytagoras: $PQ = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Da er

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{2} = \boxed{\tfrac{1}{2}},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\tfrac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\tfrac{\sqrt{3}}{3}}.$$

b) Med to sider $AB = 2$, $AC = 4$ og mellomliggende vinkel $\angle A = 30^\circ$:

$$A = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{2}.$$

c) Cosinussetningen med $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 16 - 8\sqrt{3} = 20 - 8\sqrt{3}.$$

Vi trekker ut faktoren 4 under rottegnet:

$$BC = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4(5 - 2\sqrt{3})} = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}. \qquad \boxed{BC = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

Oppgave. $f(x) = -0{,}0047x^3 + 0{,}40x^2 - 8{,}3x + 86$, $x \in [0, 52]$, gir fyllingsgraden (i prosent) i et vannmagasin x uker etter 1. januar 2016. a) Tegn grafen. b) I hvor mange uker var fyllingsgraden over 60 %? c) I hvilken uke var den lavest, og hvor stor var den da? d) Tangenten i $(22, f(22))$ — likning og tolkning av stigningstallet.

a) Med graftegner (GeoGebra) tegner du f for $0 \leq x \leq 52$. Grafen starter i $f(0) = 86$, synker til et bunnpunkt rundt uke 14 og stiger så igjen.

b) Vi løser $f(x) = 60$ med CAS/graftegner. Det gir skjæringspunktene $x \approx 3{,}80$ og $x \approx 26{,}67$ (en tredje løsning ligger utenfor $[0, 52]$). Grafen starter høyt ($f(0) = 86$), synker under 60 % mellom skjæringspunktene (bunnpunktet er ca. 35 % rundt uke 14), og stiger igjen over 60 %. Fyllingsgraden er altså *høyere* enn 60 % *utenfor* intervallet, det vil si på $[0; 3{,}80\rangle \cup \langle 26{,}67; 52]$. Antall uker:

$$3{,}80 + (52 - 26{,}67) \approx 3{,}80 + 25{,}33 = 29{,}13 \implies \boxed{\text{i om lag 29 uker}}.$$

(Til kontroll: under 60 % er den i $26{,}67 - 3{,}80 \approx 23$ uker, og $23 + 29 = 52$. ✓)

c) Bunnpunktet finnes der $f'(x) = 0$. CAS gir $x \approx 13{,}7$ i intervallet, altså i løpet av **uke 14**. Fyllingsgraden der er

$$f(13{,}7) \approx 35{,}3. \qquad \boxed{\text{Lavest i uke 14, ca. 35 \% fylt}}.$$

(Endepunktene gir $f(0) = 86$ og $f(52) \approx 75$, begge høyere, så bunnpunktet er det globale minimum.)

d) Stigningstallet er $f'(x) = -0{,}0141x^2 + 0{,}80x - 8{,}3$. I $x = 22$:

$$f'(22) \approx 2{,}48, \qquad f(22) \approx 46{,}95.$$

Tangentlikningen $y = f'(22)(x - 22) + f(22)$:

$$y \approx 2{,}48(x-22)+46{,}95 = 2{,}48x - 7{,}6. \qquad \boxed{y \approx 2{,}48x - 7{,}6}$$

Tolkning. Stigningstallet er positivt ($\approx 2{,}5$), så i uke 22 *økte* fyllingsgraden med om lag 2,5 prosentpoeng per uke.

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. To voksne og tre barn betaler til sammen 520 kr. En voksenbillett koster 40 kr mer enn en barnebillett. Hva koster hver billettype?

Løsning. La b være prisen på en barnebillett og v på en voksenbillett. Da er

$$\begin{aligned} 2v + 3b &= 520 \\ v &= b + 40 \end{aligned}$$

Sett inn $v = b + 40$ i den første likningen:

$$2(b+40) + 3b = 520 \implies 5b + 80 = 520 \implies 5b = 440 \implies b = 88.$$

Da er $v = 88 + 40 = 128$.

$$\boxed{\text{Barnebillett 88 kr,} \quad \text{voksenbillett 128 kr}}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Et linjediagram viser andelen dagligrøykere (%) i en bedrift fra 2000 til 2017. a) Bestem en lineær modell. b) Når er andelen 5 % ifølge modellen?

a) Vi leser av to punkter på diagrammet: i $x = 0$ (år 2000) er andelen ca. 30 %, og i $x = 17$ (år 2017) er den ca. 14 %. Stigningstallet blir

$$a = \frac{14-30}{17-0} = \frac{-16}{17} \approx -0{,}94.$$

Konstantleddet er startverdien 30. En lineær modell er

$$\boxed{y = -0{,}94x + 30},$$

der x er antall år etter 2000 og y er prosent dagligrøykere. (Bruker du regresjon på alle avlesningene, får du tilnærmet samme modell.)

b) Vi løser $-0{,}94x + 30 = 5$:

$$-0{,}94x = -25 \implies x = \frac{25}{0{,}94} \approx 26{,}6.$$

Det svarer til om lag 26,6 år etter 2000, altså ut på høsten i 2026.

$$\boxed{\text{Andelen er } 5\,\% \text{ omkring høsten 2026}}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. På et kjølelager er det 200 kartonger lettmelk og 100 kartonger helmelk. $\frac{2}{5}$ av lettmelkkartongene og $\frac{1}{4}$ av helmelkkartongene har *ikke* tett kork. a) Sannsynligheten for at en tilfeldig kartong ikke har tett kork. b) Gitt at en kartong ikke har tett kork: sannsynligheten for at det er lettmelk.

Løsning. Antall kartonger uten tett kork:

- Lettmelk: $\dfrac{2}{5} \cdot 200 = 80$
- Helmelk: $\dfrac{1}{4} \cdot 100 = 25$

Til sammen $80 + 25 = 105$ av i alt 300 kartonger.

a)

$$P(\text{ikke tett}) = \frac{105}{300} = \frac{7}{20} = \boxed{0{,}35}.$$

b) Av de 105 utette kartongene er 80 lettmelk:

$$P(\text{lettmelk} \mid \text{ikke tett}) = \frac{80}{105} = \frac{16}{21} \approx \boxed{0{,}76}.$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. En trekant har sidene $5s$ og $3s^2$ med mellomliggende vinkel 60°, og den motstående siden er $7s$. Bruk CAS til å bestemme s.

Løsning. Cosinussetningen på den siden ($7s$) som ligger motsatt 60°-vinkelen mellom $5s$ og $3s^2$:

$$(7s)^2 = (5s)^2 + (3s^2)^2 - 2 \cdot 5s \cdot 3s^2 \cdot \cos 60^\circ.$$

Med $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$:

$$49s^2 = 25s^2 + 9s^4 - 30s^3 \cdot \tfrac{1}{2} = 25s^2 + 9s^4 - 15s^3.$$

Dette ordnes til $9s^4 - 15s^3 - 24s^2 = 0$, og siden $s > 0$ deler vi på $3s^2$:

$$3s^2 - 5s - 8 = 0 \implies (3s - 8)(s + 1) = 0.$$

Den positive løsningen er $s = \dfrac{8}{3}$.

$$\boxed{s = \tfrac{8}{3} \approx 2{,}67}$$

CAS-kommando (GeoGebra): `Løs(9 s^4 - 15 s^3 - 24 s^2 = 0, s)` gir $s = -1$ eller $s = \frac{8}{3}$; bare $s = \frac{8}{3}$ gir gyldige (positive) sidelengder.

Oppgave 6 (3 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$, $a > 0$. Bruk CAS til å (i) vise at grafen har et nullpunkt og et stasjonært punkt i $P(a, 0)$, og (ii) avgjøre om P er topp-, bunn- eller terrassepunkt.

Løsning.

Nullpunkt: Vi setter inn $x = a$:

$$f(a) = a^3 - 2a \cdot a^2 + a^2 \cdot a = a^3 - 2a^3 + a^3 = 0,$$

så $P(a, 0)$ ligger på grafen og er et nullpunkt.

Stasjonært punkt: Vi deriverer. $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2 = (x - a)(3x - a)$. I $x = a$:

$$f'(a) = (a - a)(3a - a) = 0,$$

så P er et stasjonært punkt. ✓

Type: Andrederiverttesten. $f''(x) = 6x - 4a$, og

$$f''(a) = 6a - 4a = 2a.$$

Siden $a > 0$ er $f''(a) = 2a > 0$, så $P(a, 0)$ er et **bunnpunkt**.

$$\boxed{P(a, 0) \text{ er nullpunkt, stasjonært, og et bunnpunkt}}$$

CAS (GeoGebra):

```
f(x):=x^3 - 2 a x^2 + a^2 x
f(a)              % gir 0  -> nullpunkt
Derivert(f)       % gir 3x^2 - 4 a x + a^2
Derivert(f)(a)    % gir 0  -> stasjonært
Derivert(f,2)(a)% gir 2a > 0 (a>0)  -> bunnpunkt
```

Oppgave 7 (4 poeng)

Oppgave. Figuren viser en kvartsirkel med sentrum A og radius $2R$, en halvsirkel med sentrum B og radius R, og en halvsirkel med sentrum C og radius r. De to halvsirklene tangerer hverandre i D, som ligger på linjen gjennom B og C. a) Bruk Pytagoras til å vise at $r = \frac{2}{3}R$. b) Bruk CAS til å finne arealet av det blå området uttrykt ved R.

a) Vi legger A i origo med kvartsirkelen i første kvadrant, $B = (R, 0)$ på den vannrette kanten og $C = (0, c)$ på den loddrette kanten.

Halvsirkelen om C tangerer kvartsirkelen *innenfra* i punktet D på den felles radien fra A. Da er

$$AC = 2R - r \implies c = 2R - r.$$

De to halvsirklene tangerer hverandre *utvendig* i D, så avstanden mellom sentrene er summen av radiene:

$$BC = R + r.$$

Pytagoras i den rettvinklede trekanten ABC (rett vinkel i A) gir $BC^2 = AB^2 + AC^2$, altså

$$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2.$$

Vi regner ut:

$$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 + 4R^2 - 4Rr + r^2 \implies 2Rr = 4R^2 - 4Rr \implies 6Rr = 4R^2.$$

Deler vi på $6R$ (som er $\neq 0$), får vi $r = \dfrac{4R}{6} = \dfrac{2}{3}R$. ✓

$$\boxed{r = \tfrac{2}{3}R}$$

b) Det blå området er kvartsirkelen (radius $2R$) minus de to halvsirklene (radier R og $r = \frac{2}{3}R$):

$$A_{\text{blå}} = \underbrace{\frac{1}{4}\pi(2R)^2}_{\text{kvartsirkel}} - \underbrace{\frac{1}{2}\pi R^2}_{\text{halvsirkel } B} - \underbrace{\frac{1}{2}\pi r^2}_{\text{halvsirkel } C}.$$

Vi setter inn $r = \frac{2}{3}R$:

$$A_{\text{blå}} = \frac{1}{4}\pi \cdot 4R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 = \pi R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{4}{9}R^2.$$

$$= \pi R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{2}{9}\pi R^2 = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right)\pi R^2 = \frac{18 - 9 - 4}{18}\pi R^2 = \frac{5}{18}\pi R^2.$$

$$\boxed{A_{\text{blå}} = \frac{5}{18}\pi R^2 \approx 0{,}87\,R^2}$$

CAS (GeoGebra):

```
r:=2/3 R
1/4 pi (2R)^2 - 1/2 pi R^2 - 1/2 pi r^2   % gir 5/18 pi R^2
```

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.