Matematikk 1T — Vår 2018

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $5x + 2y = 4$ og $3x + 4y = -6$.

Løsning. Vi bruker innsettings-/addisjonsmetoden. Multipliser den første likningen med 2:

$$10x + 4y = 8.$$

Trekk fra den andre likningen $3x + 4y = -6$:

$$(10x + 4y) - (3x + 4y) = 8 - (-6) \implies 7x = 14 \implies x = 2.$$

Sett $x = 2$ inn i $5x + 2y = 4$: $10 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow y = -3$.

$$\boxed{x = 2, \quad y = -3}$$

Oppgave 2 (1 poeng)

Oppgave. Løs likningen $3 \cdot 10^x = 3000$.

Løsning. Del på 3:

$$10^x = 1000 = 10^3.$$

Like grunntall gir like eksponenter:

$$\boxed{x = 3}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut og skriv svaret på standardform: $\dfrac{\left(0{,}5 \cdot 10^6\right)^2}{0{,}2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5}}$.

Løsning. Tell teller og nevner hver for seg.

Teller: $\left(0{,}5 \cdot 10^6\right)^2 = 0{,}25 \cdot 10^{12} = 2{,}5 \cdot 10^{11}$.

Nevner: Gjør om til samme tierpotens. $0{,}2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5}$, så

$$2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Brøken blir

$$\frac{2{,}5 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{-5}} = 0{,}5 \cdot 10^{11-(-5)} = 0{,}5 \cdot 10^{16} = \boxed{5 \cdot 10^{15}}.$$

Oppgave 4 (1 poeng)

Oppgave. Vis at $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$.

Løsning. Bruk at $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ og trekk ut kvadrattall.

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3},$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

Dermed

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{48} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}}. \qquad \blacksquare$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut så enkelt som mulig: $\lg 1000 \cdot \lg \sqrt[3]{10} \cdot \lg \sqrt[5]{10^2} \cdot \lg 0{,}00001$.

Løsning. Skriv hver faktor som en tierpotens og bruk at $\lg 10^n = n$.

- $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$
- $\lg \sqrt[3]{10} = \lg 10^{1/3} = \dfrac{1}{3}$
- $\lg \sqrt[5]{10^2} = \lg 10^{2/5} = \dfrac{2}{5}$
- $\lg 0{,}00001 = \lg 10^{-5} = -5$

Produktet blir

$$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot (-5) = 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot (-5) = \boxed{-2}.$$

Oppgave 6 (3 poeng)

Oppgave. a) Vis at $x(x+2)(x-4) = x^3 - 2x^2 - 8x$. b) Løs likningen $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$.

a) Multipliser ut, to faktorer om gangen.

$$(x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8.$$

Gang med x:

$$x\left(x^2 - 2x - 8\right) = x^3 - 2x^2 - 8x. \qquad \blacksquare$$

b) Fra a) er likningen faktorisert som $x(x+2)(x-4) = 0$. Et produkt er null når en av faktorene er null:

$$x = 0, \quad x + 2 = 0, \quad x - 4 = 0.$$

$$\boxed{x \in \{-2,\ 0,\ 4\}}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 - 2x - 8 \geq 0$.

Løsning. Finn nullpunktene til $x^2 - 2x - 8$. Vi faktoriserer: $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$, så nullpunktene er $x = -2$ og $x = 4$.

Parabelen åpner oppover (positiv x^2-koeffisient), så uttrykket er ≥ 0 **utenfor** nullpunktene:

$$\boxed{x \leq -2 \text{ eller } x \geq 4}$$

Oppgave 8 (3 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 + kx + 4$. For hvilke k har grafen ingen / ett / to skjæringspunkter med x-aksen?

Løsning. Antall skjæringspunkter bestemmes av diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ med $a = 1$, $b = k$, $c = 4$:

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16.$$

$D = 0$ for $k = \pm 4$. Da gjelder:

- **Ingen** skjæringspunkter ($D < 0$): $k^2 - 16 < 0 \Rightarrow \boxed{-4 < k < 4}$
- **Ett** skjæringspunkt ($D = 0$): $\boxed{k = -4 \text{ eller } k = 4}$
- **To** skjæringspunkter ($D > 0$): $k^2 - 16 > 0 \Rightarrow \boxed{k < -4 \text{ eller } k > 4}$

Oppgave 9 (3 poeng)

Oppgave. a) Vis at $\dfrac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}} = \dfrac{3x^2+6x+3}{x^2-1}$. b) Skriv $\dfrac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}}$ så enkelt som mulig.

a) Vi forenkler den sammensatte brøken ved å multiplisere teller og nevner med $3x$ (slik at alle småbrøker forsvinner).

Teller $\cdot 3x$:

$$3x\left(x+2+\frac{1}{x}\right) = 3x^2+6x+3.$$

Nevner $\cdot 3x$:

$$3x\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}\right) = x^2-1.$$

Siden vi ganger teller og nevner med det samme ($3x \neq 0$), endres ikke verdien:

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}} = \frac{3x^2+6x+3}{x^2-1}. \qquad \blacksquare$$

b) Faktoriser teller og nevner. Telleren: $3x^2+6x+3 = 3\left(x^2+2x+1\right) = 3(x+1)^2$. Nevneren: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$. Forkort felles faktor $(x+1)$:

$$\frac{3(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{3(x+1)}{x-1} = \boxed{\frac{3x+3}{x-1}}.$$

Oppgave 10 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3+2x^2+1$. a) Bestem gjennomsnittlig vekstfart i $[-2, 2]$. b) Bestem likningen for tangenten i punktet $(1, f(1))$.

a) Gjennomsnittlig vekstfart er

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}.$$

Med $f(2) = 8+8+1 = 17$ og $f(-2) = -8+8+1 = 1$:

$$\frac{17-1}{4} = \frac{16}{4} = \boxed{4}.$$

b) Deriver: $f'(x) = 3x^2+4x$. Stigningstallet i $x=1$ er $f'(1) = 3+4 = 7$, og $f(1) = 1+2+1 = 4$.

Tangentlikningen $y = f'(1)(x-1)+f(1)$:

$$y = 7(x-1)+4 = 7x-7+4 = \boxed{7x-3}.$$

Oppgave 11 (3 poeng)

Oppgave. Du kaster en rød og en blå terning. Avgjør hvilket som er mest sannsynlig: «like mange øyne» eller «sum av øyne er 5 eller mindre».

Løsning. Det er $6 \cdot 6 = 36$ like sannsynlige utfall.

Like mange øyne: de gunstige er $(1,1),(2,2),\dots,(6,6)$, altså 6 utfall:

$$P(\text{like}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Sum ≤ 5*:* tell parene (r,b) med $r+b \leq 5$:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)$$

— det er 10 utfall:

$$P(\text{sum} \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278.$$

Siden $\frac{10}{36} > \frac{6}{36}$, er

$$\boxed{\text{«Sum av øyne er 5 eller mindre» er mest sannsynlig.}}$$

Oppgave 12 (6 poeng)

Oppgave. Med utgangspunkt i 30-60-90-setningen (likesidet trekant med side s, høyde CD fra C): a) Vis at $DC = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$. b) Bruk $\triangle ADC$ til å vise at $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. I $\triangle PQR$ er $PQ = 8$, $PR = 2\sqrt{3}$ og $\angle P = 60^\circ$: c) Bestem arealet av $\triangle PQR$. d) Vis at $\tan Q = \dfrac{3}{8-\sqrt{3}}$.

a) Den likesidete trekanten har side s. Høyden CD halverer grunnlinjen AB, så $AD = \dfrac{s}{2}$. I den rettvinklete trekanten ADC er hypotenusen $AC = s$ og den ene kateten $AD = \dfrac{s}{2}$. Pytagoras gir

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3s^2}{4}.$$

Dermed

$$DC = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s\sqrt{3}}{2}. \qquad \blacksquare$$

b) I $\triangle ADC$ er $\angle A = 60^\circ$. Sinus til 60° er motstående katet (DC) delt på hypotenusen ($AC = s$):

$$\sin 60^\circ = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{s\sqrt{3}}{2}}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \blacksquare$$

c) Arealet med to sider og mellomliggende vinkel $\angle P = 60^\circ$:

$$A = \frac{1}{2}\,PQ \cdot PR \cdot \sin P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{12}.$$

d) La S være foten av høyden fra R ned på PQ (figuren). I den rettvinklete trekanten PSR med $\angle P = 60^\circ$ og $PR = 2\sqrt{3}$:

$$RS = PR \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$
$$PS = PR \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Da er $SQ = PQ - PS = 8 - \sqrt{3}$. I den rettvinklete trekanten RSQ er

$$\tan Q = \frac{RS}{SQ} = \frac{3}{8 - \sqrt{3}}. \qquad \blacksquare$$

Oppgave 13 (4 poeng)

Oppgave. Fire andregradsfunksjoner $p(x) = x^2 - 2x$, $q(x) = x^2 + 2x - 2$, $r(x) = 4 - x^2$ og $s(x) = x^2 - 2x - 2$ skal pares med fire av seks grafer (A–F). Begrunn svarene.

Løsning. Vi finner kjennetegn som er lette å lese av i en graf: åpningsretning, skjæring med y-aksen og hvor toppunktet/bunnpunktet ligger.

	Åpner	y-skjæring $f(0)$	Bunn-/toppunkt	Nullpunkter
$p(x) = x^2 - 2x$	opp	0	bunn $(1, -1)$	$x = 0,\ x = 2$
$q(x) = x^2 + 2x - 2$	opp	-2	bunn $(-1, -3)$	$x \approx -2{,}7;\ 0{,}7$
$r(x) = 4 - x^2$	**ned**	4	topp $(0, 4)$	$x = \pm 2$
$s(x) = x^2 - 2x - 2$	opp	-2	bunn $(1, -3)$	$x \approx -0{,}7;\ 2{,}7$

Resonnement, fra det sikreste til det mest finmaskede:

- r er den **eneste** funksjonen som åpner nedover (negativ x^2-koeffisient) og har toppunkt $(0, 4)$ på y-aksen. Det er grafen som vender den hule siden ned: **F**.
- p er den eneste funksjonen med konstantledd 0, så $p(0) = 0$ — grafen går **gjennom origo**. Det er grafen som krysser akssystemet nøyaktig i $(0, 0)$: **E**.
- q og s er «speilbilder»: begge åpner opp, begge har y-skjæring -2 og bunnverdi -3. Det eneste som skiller dem er **hvor bunnpunktet ligger**: q har bunn i $x = -1$ (til **venstre** for y-aksen), mens s har bunn i $x = 1$ (til **høyre**). Grafen med bunnpunkt til venstre er q: **C**. Grafen med bunnpunkt til høyre er s: **D**.

$$\boxed{p \to \text{E}, \quad q \to \text{C}, \quad r \to \text{F}, \quad s \to \text{D}}$$

(De to resterende grafene A og B hører ikke til noen av de fire oppgitte funksjonene.)

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Oppgave. Tabell over prisen på en kroneis $(1, 4, 8, 14, 20, 25$ kr) i årene $1970, 1980, \dots, 2017$. a) Plott punktene ($x =$ år etter 1970). Modell: $f(x) = 0{,}0054x^2 + 0{,}26x + 0{,}9$, $x \in [0, 50]$. b) Tegn grafen i samme system. c) Når var prisen 16 kr ifølge modellen? d) Hvor mye steg prisen i gjennomsnitt per år fra 1975 til 2015?

a) / b) Punktene legges inn med x-verdiene $0, 10, 20, 30, 40, 47$ og tilhørende priser $1, 4, 8, 14, 20, 25$. Grafen til f tegnes i samme koordinatsystem (f.eks. i GeoGebra). f er en oppoverbøyd parabeldel som følger punktene godt — den ligger nær alle målepunktene.

c) Vi løser $f(x) = 16$:

$$0{,}0054x^2 + 0{,}26x + 0{,}9 = 16 \implies 0{,}0054x^2 + 0{,}26x - 15{,}1 = 0.$$

Abc-formelen gir to løsninger $x \approx 34{,}0$ og $x \approx -82{,}2$. Bare den positive er aktuell i $[0, 50]$, så $x \approx 34$.

År $1970 + 34 = 2004$. Prisen var 16 kroner i

$$\boxed{\text{år } 2004\ (x \approx 34)}.$$

d) «1975 til 2015» svarer til $x = 5$ og $x = 45$. Gjennomsnittlig vekst per år er den gjennomsnittlige vekstfarten:

$$\frac{f(45) - f(5)}{45 - 5}.$$

Vi regner $f(45) = 0{,}0054 \cdot 2025 + 0{,}26 \cdot 45 + 0{,}9 = 10{,}935 + 11{,}7 + 0{,}9 = 23{,}535$ og $f(5) = 0{,}0054 \cdot 25 + 0{,}26 \cdot 5 + 0{,}9 = 0{,}135 + 1{,}3 + 0{,}9 = 2{,}335$. Dermed

$$\frac{23{,}535 - 2{,}335}{40} = \frac{21{,}2}{40} = \boxed{0{,}53 \text{ kr per år}}.$$

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. 640 elever. $\frac{1}{4}$ legger seg før kl. 23. Av dem som legger seg før 23 har $\frac{4}{5}$ snitt over fire; av dem som legger seg etter 23 har $\frac{1}{3}$ snitt over fire. a) Lag en krysstabell. b) P(snitt over fire). c) P(før 23 | snitt over fire).

a) Antall som legger seg **før 23**: $\frac{1}{4} \cdot 640 = 160$. **Etter 23**: $640 - 160 = 480$.

- Før 23 med snitt over fire: $\frac{4}{5} \cdot 160 = 128$; under fire: $160 - 128 = 32$.
- Etter 23 med snitt over fire: $\frac{1}{3} \cdot 480 = 160$; under fire: $480 - 160 = 320$.

	Snitt over fire	Snitt $\leq$ fire	Sum
Før kl. 23	128	32	160
Etter kl. 23	160	320	480
Sum	288	352	640

	Snitt over fire	Snitt $\leq$ fire	Sum

b) Antall med snitt over fire er $128 + 160 = 288$:

$$P(\text{over fire}) = \frac{288}{640} = \frac{9}{20} = \boxed{0{,}45}.$$

c) Betinget sannsynlighet — av de 288 med snitt over fire er 128 slike som legger seg før 23:

$$P(\text{før } 23 \mid \text{over fire}) = \frac{128}{288} = \frac{4}{9} \approx \boxed{0{,}44}.$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. En trekant har vinkler 45° og 75°, sidene $s + 6$ (mellom de to oppgitte vinklene sett fra figuren) og $\sqrt{6} \cdot s$. Bruk CAS til å bestemme s.

Løsning. Vinkelsummen gir den tredje vinkelen $180° - 45° - 75° = 60°$.

Av figuren ligger siden $\sqrt{6} \cdot s$ motstående 45°-vinkelen, og siden $s + 6$ ligger motstående 60°-vinkelen. Sinussetningen gir

$$\frac{s + 6}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6} \cdot s}{\sin 45°}.$$

Dette løses i CAS:

```
Løs( (s + 6) / sin(60°) = (sqrt(6)·s) / sin(45°), s )
```

CAS gir $s = 3$. (For hånd: $\dfrac{s+6}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{6}\,s}{\sqrt{2}/2}$, altså $\dfrac{s+6}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}\,s}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\,s$, som gir $s + 6 = 3s$, dvs. $2s = 6$.)

$$\boxed{s = 3}$$

Oppgave 4 (6 poeng)

Oppgave. To rettvinklete trekanter $\triangle ADC$ og $\triangle DBC$ med felles høyde $CD = h$. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c_1$, $DB = c_2$, $\angle ACD = u$, $\angle BCD = v$. a) Vis at $h = a\cos u$ og $h = b\cos v$. b) Vis at arealet $T = \frac{c_1 h}{2} + \frac{c_2 h}{2}$ kan skrives som $T = \frac{a\sin u \cdot b\cos v}{2} + \frac{b\sin v \cdot a\cos u}{2}$. c) Vis ved sammenligning med $T = \frac{1}{2}ab\sin(u + v)$ at $\sin(u + v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u$.

a) Se på den rettvinklete trekanten ADC, som er rettvinklet i D. Her er $\angle ACD = u$, hypotenusen er $AC = a$, og $CD = h$ er den **hosliggende** kateten til vinkelen u. Da er

$$\cos u = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{h}{a} \implies h = a\cos u.$$

Tilsvarende i den rettvinklete trekanten DBC (rettvinklet i D): $\angle BCD = v$, hypotenus $BC = b$, og $CD = h$ er hosliggende katet til v:

$$\cos v = \frac{h}{b} \implies h = b\cos v.$$

Maria har altså rett — høyden kan uttrykkes på begge måter. $\blacksquare$

b) Vi trenger også de to grunnlinjene. I $\triangle ADC$ er $AD = c_1$ den **motstående** kateten til u, så

$$\sin u = \frac{c_1}{a} \implies c_1 = a\sin u,$$

og i $\triangle DBC$ er $DB = c_2$ motstående katet til v:

$$\sin v = \frac{c_2}{b} \implies c_2 = b\sin v.$$

Sett dette inn i Marias arealuttrykk, og bruk fra a) at $h = b\cos v$ i det første leddet og $h = a\cos u$ i det andre:

$$T = \frac{c_1\,h}{2} + \frac{c_2\,h}{2} = \frac{(a\sin u)(b\cos v)}{2} + \frac{(b\sin v)(a\cos u)}{2} = \frac{a\sin u\cdot b\cos v}{2} + \frac{b\sin v\cdot a\cos u}{2}. \qquad \blacksquare$$

c) Mats' arealsetning gir det samme arealet:

$$\frac{1}{2}ab\sin(u+v) = \frac{a\sin u\cdot b\cos v}{2} + \frac{b\sin v\cdot a\cos u}{2}.$$

Multipliser begge sider med $\dfrac{2}{ab}$ (der $a, b \neq 0$). På høyresiden forkortes ab i begge ledd:

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u. \qquad \blacksquare$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 - 6x + 8$. a) Vis at tangenten i $(4, f(4))$ er parallell med linjen gjennom $(2, f(2))$ og $(6, f(6))$. For $g(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$: b) Bruk CAS til å finne stigningstallet til tangenten i $M\left(\frac{p+q}{2}, g\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$. c) Vis at linjen gjennom $P(p, g(p))$ og $Q(q, g(q))$ er parallell med tangenten i b).

a) Deriver: $f'(x) = 2x - 6$. Tangentens stigningstall i $x = 4$:

$$f'(4) = 2\cdot 4 - 6 = 2.$$

Stigningstallet til linjen (sekanten) gjennom $(2, f(2))$ og $(6, f(6))$ er

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}.$$

Med $f(6) = 36 - 36 + 8 = 8$ og $f(2) = 4 - 12 + 8 = 0$:

$$\frac{8-0}{4} = 2.$$

Begge stigningstall er 2, altså er linjene **parallelle**. $\blacksquare$

b) I CAS deriverer vi g og setter inn $x = \dfrac{p+q}{2}$:

```
g(x) := a x^2 + b x + c
Derivér(g, x)              ->  2 a x + b
f'( (p+q)/2 )              ->  a (p + q) + b
```

Stigningstallet til tangenten i M er

$$g'\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2a \cdot \frac{p+q}{2} + b = \boxed{a(p+q)+b}.$$

c) Stigningstallet til linjen gjennom P og Q:

$$\frac{g(q)-g(p)}{q-p} = \frac{(aq^2+bq+c)-(ap^2+bp+c)}{q-p} = \frac{a\left(q^2-p^2\right)+b(q-p)}{q-p}.$$

Bruk $q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$ og forkort $(q-p)$:

$$= a(q+p) + b = a(p+q) + b.$$

Dette er nøyaktig stigningstallet til tangenten i M fra b), så linjen PQ er **parallell** med tangenten. $\blacksquare$

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.