Matematikk 1T — Vår 2019

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Oppgave. Regn ut $\dfrac{4{,}5 \cdot 10^{12}}{900}$ og skriv svaret på standardform.

Løsning. Vi deler tallet for seg og tierpotensen for seg:

$$\frac{4{,}5 \cdot 10^{12}}{900} = \frac{4{,}5}{900} \cdot 10^{12} = 0{,}005 \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{9}.$$

$$\boxed{5 \cdot 10^{9}}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $-x^2 - 2x + 3 > 0$.

Løsning. Vi finner først nullpunktene til $-x^2-2x+3$. Multipliserer vi med -1 får vi $x^2+2x-3 = 0$, som faktoriseres til $(x+3)(x-1) = 0$. Nullpunktene er

$$x = -3 \quad \text{og} \quad x = 1.$$

Parabelen $y = -x^2-2x+3$ har negativ koeffisient foran x^2, så den åpner **nedover**. Da er uttrykket positivt *mellom* nullpunktene:

$$\boxed{-3 < x < 1}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{x^2}{x^2-4} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$.

Løsning. Vi faktoriserer nevneren $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Fellesnevneren er $(x-2)(x+2)$. Vi utvider de to siste brøkene:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{1\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 3(x+2) + (x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Telleren blir

$$x^2 + 3x + 6 + x - 2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

Dermed forkortes en faktor $(x+2)$ bort:

$$\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \boxed{\frac{x+2}{x-2}} \qquad (x \neq \pm 2).$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut $4^2 \cdot 2^{-3} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{-\frac{2}{3}}$.

Løsning. Vi skriver alt på primtallspotenser. Med $4 = 2^2$, $27 = 3^3$ og $64 = 2^6$:

$$4^2 = 2^4, \qquad 27^{1/3} = 3^{3\cdot\frac{1}{3}} = 3, \qquad 64^{-2/3} = 2^{6\cdot(-\frac{2}{3})} = 2^{-4}.$$

Setter vi sammen potensene av 2:

$$2^4 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} = 2^{4-3-4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Multiplisert med 3 fra $27^{1/3}$:

$$\frac{1}{8} \cdot 3 = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. En likebeint trekant har to sider lik 5 og grunnlinje 6. Vinkelen v ligger mellom grunnlinjen og en av sidene (nederst til venstre). Bestem $\tan v$.

Løsning. Vi feller en høyde fra toppunktet ned på grunnlinjen. Siden trekanten er likebeint, treffer høyden midt på grunnlinjen og deler den i to like deler på 3 hver. Da får vi en rettvinklet trekant med hypotenus 5 (siden) og en katet på 3 (halve grunnlinjen). Høyden h finnes med Pytagoras:

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Vinkelen v ligger ved grunnlinjen. Den hosliggende kateten er den halve grunnlinjen 3, og den motstående kateten er høyden 4:

$$\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Regn ut $\lg 100 + \lg 1 + \lg \sqrt{10} + \lg 0{,}001$.

Løsning. Her er $\lg = \log_{10}$. Vi regner ut hvert ledd:

$$\lg 100 = \lg 10^2 = 2, \qquad \lg 1 = 0, \qquad \lg \sqrt{10} = \lg 10^{1/2} = \tfrac{1}{2}, \qquad \lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3.$$

Summen blir

$$2 + 0 + \tfrac{1}{2} - 3 = \boxed{-\tfrac{1}{2}}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningen $\lg(10^x \cdot 10^{2x}) = 6$.

Løsning. Vi bruker potensregelen $10^x \cdot 10^{2x} = 10^{x+2x} = 10^{3x}$. Da blir

$$\lg(10^{3x}) = 6 \implies 3x = 6 \implies x = 2.$$

$$\boxed{x = 2}$$

Oppgave 8 (3 poeng)

Oppgave. Om f vet vi at $f(x) = kx^2 + 12x + 9$ og at $f(x)$ er et fullstendig kvadrat. a) Bestem k. b) Bestem nullpunktet til f.

a) At andregradsuttrykket er et *fullstendig kvadrat* betyr at det har ett (dobbelt) nullpunkt, altså at diskriminanten er null:

$$b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot k \cdot 9 = 144 - 36k = 0 \implies k = \frac{144}{36} = \boxed{4}.$$

b) Med $k = 4$ er $f(x) = 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$. Nullpunktet er der $(2x+3)^2 = 0$:

$$2x + 3 = 0 \implies \boxed{x = -\tfrac{3}{2}}$$

(Det er ett dobbelt nullpunkt, i samsvar med at f er et fullstendig kvadrat.)

Oppgave 9 (3 poeng)

Oppgave. Sannsynligheten for at toget er i rute en mandag er 80 %, og en fredag 90 %. Marit tar toget mandag og fredag. a) Sannsynligheten for at toget er i rute *begge* dager. b) Sannsynligheten for at toget er i rute *nøyaktig én* av dagene.

Vi antar at hendelsene er uavhengige. La $P(M) = 0{,}80$ og $P(F) = 0{,}90$.

a) I rute begge dager:

$$P(M \cap F) = 0{,}80 \cdot 0{,}90 = \boxed{0{,}72 = 72\,\%}.$$

b) Nøyaktig én betyr (i rute mandag, forsinket fredag) *eller* (forsinket mandag, i rute fredag):

$$P = 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}20 \cdot 0{,}90 = 0{,}08 + 0{,}18 = \boxed{0{,}26 = 26\,\%}.$$

Oppgave 10 (5 poeng)

Oppgave. Sammenhengen mellom grader celsius (x) og fahrenheit (y) er gitt ved tabellen $(-50, -58)$, $(-30, -22)$, $(0, 32)$, $(10, 50)$. a) Tegn punktene og en rett linje gjennom dem. b) Hvor kaldt må det være for at de to gradestokkene viser samme verdi? c) Finn en formel. d) Vis at $100\,^\circ\mathrm{C} = 212\,^\circ\mathrm{F}$.

a) Punktene ligger på en rett linje. Med celsius langs x-aksen og fahrenheit langs y-aksen markerer vi $(-50, -58)$, $(-30, -22)$, $(0, 32)$ og $(10, 50)$ og trekker en rett linje gjennom dem. (Linjen skjærer y-aksen i 32 og stiger mot høyre.)

c) Vi finner formelen først (den trengs i b og d). Linjen er $y = ax + b$. Stigningstallet bruker to punkter, for eksempel $(0, 32)$ og $(10, 50)$:

$$a = \frac{50 - 32}{10 - 0} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Punktet $(0, 32)$ gir konstantleddet $b = 32$. Altså

$$\boxed{y = \tfrac{9}{5}x + 32} \qquad \Big(F = \tfrac{9}{5}C + 32\Big).$$

b) «Samme verdi» betyr $y = x$. Vi løser

$$x = \tfrac{9}{5}x + 32 \implies x - \tfrac{9}{5}x = 32 \implies -\tfrac{4}{5}x = 32 \implies x = -40.$$

$$\boxed{-40\,^\circ\mathrm{C} = -40\,^\circ\mathrm{F}}$$

De to gradestokkene viser samme verdi ved -40 grader.

d) Setter vi $C = 100$ inn i formelen:

$$F = \tfrac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 180 + 32 = 212.$$

$$\boxed{100\,^\circ\mathrm{C} = 212\,^\circ\mathrm{F}}$$

Oppgave 11 (4 poeng)

Oppgave. a) Vis at 1) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ og 2) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. b) Vis/forklar at $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. c) I trekant ABC er $AC = \sqrt{48}$, $AB = \sqrt{75}$ og $\angle A = 60^\circ$. Bestem en eksakt verdi for BC.

a) Vi trekker ut det største kvadrattallet under rottegnet:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

b) Ta en likesidet trekant med side 2 (alle vinkler 60°). En høyde halverer en av vinklene og halverer motstående side. Dette gir en rettvinklet trekant med hypotenus 2 og den hosliggende kateten til 60°-vinkelen lik 1 (halve grunnlinjen). Da er

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2} = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

c) Vi bruker cosinussetningen i trekant ABC med den kjente vinkelen $A = 60^\circ$ mellom sidene $AB = \sqrt{75}$ og $AC = \sqrt{48}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Her er $AB^2 = 75$, $AC^2 = 48$, og $2 \cdot AB \cdot AC = 2\sqrt{75} \cdot \sqrt{48} = 2\sqrt{75 \cdot 48} = 2\sqrt{3600} = 2 \cdot 60 = 120$. Med $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$:

$$BC^2 = 75 + 48 - 120 \cdot \tfrac{1}{2} = 123 - 60 = 63.$$

$$BC = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \boxed{3\sqrt{7}}$$

Oppgave 12 (2 poeng)

Oppgave. En trekant har to sider $2\sqrt{3}$ og 8 med mellomliggende vinkel 120°. Arealet er oppgitt til 12. Bruk dette til å vise at $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Løsning. Arealet av en trekant med to sider og mellomliggende vinkel er

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin V = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ.$$

Setter vi $A = 12$:

$$8\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ = 12 \implies \sin 120^\circ = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Oppgave 13 (2 poeng)

Oppgave. En blå figur er tegnet på et rutenett med kvadratiske ruter med side a. Figuren består av en sirkel (der en bue er erstattet av en «hale») nedenfor. Bestem omkretsen uttrykt ved a.

Løsning. Vi leser av figuren på rutenettet. Sirkelen har sentrum i et rutekryss, og fra sentrum til randa er det 3 ruter både opp, ned, til venstre og til høyre.

Sirkelbuen. Radien er altså $r = 3a$. Den fullstendige omkretsen til en sirkel er $2\pi r = 2\pi \cdot 3a = 6\pi a$. Av denne sirkelen er $\frac{1}{4}$ (kvarten nede til venstre) erstattet av halen — den er tegnet stiplet på figuren. Buen som faktisk er en del av omkretsen, er derfor $\frac{3}{4}$ av hele sirkelen:

$$\text{sirkelbue} = \tfrac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 3a = \tfrac{3}{4} \cdot 6\pi a = \frac{9\pi a}{2}.$$

Halen. Halen er tre rette linjestykker som leses av på rutenettet:

- et loddrett linjestykke ned fra sirkelen på venstre side, 2 ruter: lengde $2a$;
- et loddrett linjestykke opp til sirkelen på høyre side, 3 ruter: lengde $3a$;
- et skrått linjestykke som forbinder dem, og som endrer seg 3 ruter i x-retning og 4 ruter i y-retning. Med Pytagoras blir lengden

$$\text{skrå side} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a.$$

De rette linjestykkene bidrar med $2a + 3a + 5a = 10a$.

Samlet omkrets:

$$O = \frac{9\pi a}{2} + 2a + 3a + 5a = \frac{9\pi a}{2} + 10a = \boxed{\frac{1}{2}\,(9\pi + 20)\,a} \quad (\approx 24{,}1\,a).$$

Oppgave 14 (4 poeng)

Oppgave. Fire funksjoner p, q, r, s skal kobles til seks grafer A–F ut fra opplysninger om de deriverte / vekstfart / tangenter. Begrunn svarene.

Vi tar ett og ett krav:

Graf til q. Det er gitt $q'(1) = -2$ og $q'(2) = -2$. Den deriverte (stigningstallet) er den samme i to ulike punkter — det er kjennetegnet på en **rett linje** med stigningstall -2. Den eneste linjen med (negativt) stigningstall -2 er **graf E** (synkende linje, $y = -2x + 4$).

$$\boxed{q \to \text{E}}$$

Graf til s. Tangentene i $\big(-2, s(-2)\big)$ og $\big(2, s(2)\big)$ er $y = -8x - 16$ og $y = -8x + 16$. Begge har stigningstall -8, så $s'(-2) = s'(2) = -8$. Setter vi $x = -2$ og $x = 2$ i tangentlikningene, får vi $s(-2) = 0$ og $s(2) = 0$. En tredjegradsfunksjon som er null i $x = \pm 2$, har bratt *negativt* stigningstall der, og er symmetrisk om origo, passer med en «omvendt» tredjegradsgraf med toppunkt til høyre og bunnpunkt til venstre. Dette er **graf B** (den går fra øvre venstre, har bunnpunkt nær $(-1, -3)$, toppunkt nær $(1,3)$ og faller bratt mot nedre høyre; nullpunkter ved $x = -2, 0, 2$). Kontroll: en modell $s(x) = -x^3 + 4x$ gir $s(\pm 2) = 0$ og $s'(\pm 2) = -3 \cdot 4 + 4 = -8$. ✓

$$\boxed{s \to \text{B}}$$

Graf til p. Det er gitt $p'(0) = 0$ og $p'(-1) < 0$. At $p'(0) = 0$ betyr vannrett tangent i $x = 0$, og $p'(-1) < 0$ betyr at grafen synker like til venstre for $x = 0$. En graf som synker fram mot $x = 0$ og er vannrett der, har et **bunnpunkt i** $x = 0$ — altså en parabel som åpner oppover med bunnpunkt på y-aksen. Dette er **graf A** (parabel som åpner oppover med bunnpunkt på y-aksen; den synker for $x < 0$).

$$\boxed{p \to \text{A}}$$

Graf til r. Den gjennomsnittlige vekstfarten til r på $[-2, 0]$ er 3, det vil si

$$\frac{r(0) - r(-2)}{0 - (-2)} = 3 \implies r(0) - r(-2) = 6.$$

Vi trenger en graf der y-verdien øker med 6 når vi går fra $x = -2$ til $x = 0$ (positiv gjennomsnittlig vekstfart). Vi sjekker de gjenværende grafene C, D og F:

- **Graf C** (rett linje) har stigningstall ≈ 1, så gjennomsnittlig vekstfart er $\approx 1 \neq 3$.
- **Graf D** (tredjegradsgraf gjennom origo) er svært flat nær origo: $D(0) = 0$ og $D(-2) \approx -1{,}3$, som gir gjennomsnittlig vekstfart $\approx \frac{1{,}3}{2} \approx 0{,}65 \neq 3$.
- **Graf F** (parabel som vender den hule siden ned, med nullpunkter ca. $x = -1{,}6$ og $x = 2{,}6$) gir $F(0) \approx 4{,}2$ og $F(-2) \approx -1{,}8$, altså $\frac{F(0)-F(-2)}{2} \approx \frac{6}{2} = 3$. ✓

Den eneste grafen som oppfyller kravet er derfor **graf F**.

$$\boxed{r \to \text{F}}$$

Oppsummert: $p \to \text{A}, \quad q \to \text{E}, \quad r \to \text{F}, \quad s \to \text{B}$. Grafene C og D brukes ikke.

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Oppgave. Temperaturen ved Lindesnes og Nordkapp x timer etter midnatt (januar 2019) er gitt ved

$$L(x) = -0{,}0025x^3 + 0{,}089x^2 - 0{,}67x + 6{,}12, \qquad N(x) = -0{,}00016x^3 + 0{,}01x^2 - 0{,}31x + 1{,}15,$$

begge for $x \in [0, 24]$. a) Tegn grafene. b) Momentan vekstfart for hver når $x = 8$, med praktisk tolkning. c) Temperaturforskjellen kl. 12.00. d) Når var forskjellen størst, og hvor stor var den?

a) Tegnet med graftegner (f.eks. GeoGebra) på $[0, 24]$. L ligger over N hele døgnet: L starter på 6,12 °C, har et bunnpunkt litt etter midnatt og stiger utover dagen mot ca. 9,5 °C ved $x = 24$. N starter på 1,15 °C, synker først litt og stiger så svakt. (Skriv ut grafvinduet til eksamensbesvarelsen.)

b) Den momentane vekstfarten er den deriverte. Vi deriverer:

$$L'(x) = -0{,}0075x^2 + 0{,}178x - 0{,}67, \qquad N'(x) = -0{,}00048x^2 + 0{,}02x - 0{,}31.$$

Setter vi inn $x = 8$:

$$L'(8) = -0{,}0075 \cdot 64 + 0{,}178 \cdot 8 - 0{,}67 = 0{,}274,$$
$$N'(8) = -0{,}00048 \cdot 64 + 0{,}02 \cdot 8 - 0{,}31 \approx -0{,}181.$$

$$\boxed{L'(8) \approx 0{,}27\ ^\circ\text{C/time}, \qquad N'(8) \approx -0{,}18\ ^\circ\text{C/time}}$$

Tolkning: Klokka 08.00 **stiger** temperaturen ved Lindesnes med ca. 0,27 grader per time, mens den ved Nordkapp **synker** med ca. 0,18 grader per time.

c) Klokka 12.00 svarer til $x = 12$:

$$L(12) = 6{,}576, \qquad N(12) = -1{,}406.$$

Temperaturforskjellen er

$$L(12) - N(12) = 6{,}576 - (-1{,}406) \approx \boxed{8{,}0\ ^\circ\text{C}}$$

d) Forskjellen er $D(x) = L(x) - N(x)$. Vi finner maksimum på $[0, 24]$ ved å derivere og sette lik null (CAS):

$$D(x) = -0{,}00234x^3 + 0{,}079x^2 - 0{,}36x + 4{,}97,$$
$$D'(x) = 0 \implies x \approx 19{,}9.$$

Dette gir et toppunkt inne i intervallet (kontroll mot endepunktene $D(0) = 4{,}97$ og $D(24) \approx 9{,}49$ bekrefter at $x \approx 19{,}9$ gir størst verdi):

$$D(19{,}9) \approx 10{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

$$\boxed{\text{Størst forskjell ca. kl. 20.00, da forskjellen er omtrent 10,7 °C.}}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

Oppgave. 1000 personer i en spørreundersøkelse. 25 % er under 30 år. Av de som er 30 år eller eldre kildesorterer 44 % aluminiumsformer; av de under 30 år gjør 14 % det. a) Lag en krysstabell. b) Sannsynligheten for at en tilfeldig person kildesorterer. c) Gitt at personen kildesorterer: sannsynligheten for at personen er under 30 år.

a) Antall i hver gruppe:

- Under 30: $0{,}25 \cdot 1000 = 250$. Av disse kildesorterer $0{,}14 \cdot 250 = 35$.
- 30 eller eldre: 750. Av disse kildesorterer $0{,}44 \cdot 750 = 330$.

	Kildesorterer	Kildesorterer ikke	Sum
Under 30 år	35	215	250
30 år eller eldre	330	420	750
Sum	365	635	1000

b) Totalt 365 av 1000 kildesorterer:

$$P(\text{kildesorterer}) = \frac{365}{1000} = \boxed{0{,}365 = 36{,}5\,\%}.$$

c) Betinget sannsynlighet — vi vet at personen kildesorterer, og spør om hun er under 30:

$$P(\text{under 30} \mid \text{kildesorterer}) = \frac{35}{365} = \frac{7}{73} \approx \boxed{0{,}096 = 9{,}6\,\%}.$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = ax + b$ med $a > 0$. På figuren er A og C på grafen, $AD = 1$ (vannrett), CD loddrett. a) Forklar at $CD = a$. b) Forklar at $\triangle ADC$ og $\triangle BDA$ er formlike. c) Vis at $BD = \frac{1}{a}$. d) Vis påstanden: står to lineære grafer normalt på hverandre, er produktet av stigningstallene -1.

a) Stigningstallet til en rett linje er «hvor mye y øker når x øker med 1». Fra A til C øker x med $AD = 1$ (vannrett), og y øker med CD (loddrett). Altså er

$$a = \text{stigningstall} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CD}{AD} = \frac{CD}{1} = CD,$$

så $\boxed{CD = a}$.

b) Linjen g står normalt på f i A, så $\angle DAB$ (mellom AD og AB) er rett vinkel pluss det som trengs — vi resonnerer slik: I $\triangle ADC$ er $\angle ADC = 90^\circ$, og i $\triangle BDA$ er $\angle BDA = 90^\circ$ (begge fordi CD og BD er loddrette, AD vannrett). Videre er $\angle DAC = \angle DBA$ fordi begge er komplementvinkelen til samme vinkel $\angle DAB$:

- I $\triangle ADC$: $\angle DAC + \angle DCA = 90^\circ$.
- Siden $f \perp g$ er $\angle CAB = 90^\circ$, og dermed er $\angle DAB = 90^\circ - \angle DAC$. I $\triangle BDA$ er $\angle DBA = 90^\circ - \angle DAB = \angle DAC$.

To trekanter med samme vinkler er formlike. Begge er rettvinklede og deler vinkelen ved A/B med $\triangle ABC$, så $\triangle ADC \sim \triangle BDA$ (begge er formlike med $\triangle ABC$).

$$\boxed{\triangle ADC \sim \triangle BDA}$$

c) Av formlikheten er forholdet mellom samsvarende sider likt. Samsvarende sider er ($AD \leftrightarrow BD$) og ($CD \leftrightarrow AD$):

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} \implies AD^2 = BD \cdot CD.$$

Setter vi inn $AD = 1$ og $CD = a$:

$$1^2 = BD \cdot a \implies \boxed{BD = \frac{1}{a}}$$

d) Stigningstallet til f er a (positivt, linjen stiger). Stigningstallet til g leser vi av trekant $\triangle BDA$: fra A til B øker x med $AD = 1$, mens y **synker** med $BD = \frac{1}{a}$. Altså er stigningstallet til g lik

$$a_g = \frac{-BD}{AD} = \frac{-\frac{1}{a}}{1} = -\frac{1}{a}.$$

Produktet av stigningstallene blir

$$a \cdot a_g = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = \boxed{-1}.$$

Dette viser påstanden: når to lineære grafer står normalt på hverandre, er produktet av stigningstallene -1.

Oppgave 4 (6 poeng)

Oppgave. $f(x) = x(x^2 - 8)$. A og B er nullpunkter, C er toppunkt. a) Bruk CAS til å finne eksakte koordinater til A, B og C. b) Eksakt areal av $\triangle ABC$. c) D er skjæringspunktet mellom tangenten til f i B og den loddrette linjen gjennom A. Finn eksakt forhold mellom arealet av $\triangle ABD$ og $\triangle ABC$.

Vi har $f(x) = x(x^2 - 8) = x^3 - 8x$.

a) *Nullpunkter:* $x^3 - 8x = x(x^2 - 8) = 0$ gir $x = 0$ eller $x^2 = 8$, altså $x = \pm 2\sqrt{2}$. Fra figuren er A det venstre nullpunktet og B origo:

$$A = (-2\sqrt{2},\, 0), \qquad B = (0,\, 0).$$

Toppunkt: $f'(x) = 3x^2 - 8 = 0$ gir $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Toppunktet C ligger til venstre (negativ x):

$$x_C = -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \qquad f(x_C) = \frac{32\sqrt{6}}{9}.$$

$$\boxed{A = (-2\sqrt{2},\,0), \quad B = (0,\,0), \quad C = \left(-\tfrac{2\sqrt{6}}{3},\ \tfrac{32\sqrt{6}}{9}\right)}$$

b) I $\triangle ABC$ ligger A og B på x-aksen, så grunnlinjen er AB med lengde $2\sqrt{2}$. Høyden er y-koordinaten til C, altså $\frac{32\sqrt{6}}{9}$:

$$\text{Areal} = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot h = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot \frac{32\sqrt{6}}{9} = \frac{32\sqrt{12}}{9} = \frac{32\cdot 2\sqrt{3}}{9} = \boxed{\frac{64\sqrt{3}}{9}} \ (\approx 12{,}3).$$

c) *Tangenten i B:* $f'(0) = 3\cdot 0 - 8 = -8$, og $f(0) = 0$, så tangenten er $y = -8x$. *Loddrett linje gjennom A:* $x = -2\sqrt{2}$. Skjæringspunktet D:

$$y_D = -8\cdot(-2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2} \implies D = (-2\sqrt{2},\,16\sqrt{2}).$$

I $\triangle ABD$ er grunnlinjen $AB = 2\sqrt{2}$ (på x-aksen) og høyden er $AD = 16\sqrt{2}$ (loddrett):

$$\text{Areal}(\triangle ABD) = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 16\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 16\cdot 2 = 32.$$

Forholdet blir

$$\frac{\text{Areal}(\triangle ABD)}{\text{Areal}(\triangle ABC)} = \frac{32}{\frac{64\sqrt{3}}{9}} = \frac{32\cdot 9}{64\sqrt{3}} = \frac{288}{64\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \ (\approx 2{,}60).$$
