Matematikk 1T — Vår 2021

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningssystemet $2x - y = 4$ og $x - 2y = 5$.

Løsning. Fra den første likningen er $y = 2x - 4$. Sett inn i den andre:

$$x - 2(2x - 4) = 5 \implies x - 4x + 8 = 5 \implies -3x = -3 \implies x = 1.$$

Da blir $y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$.

$$\boxed{x = 1, \quad y = -2}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Sorter verdiene $\sin 60^\circ$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$, $\sin 160^\circ$ og $\lg 1$ i stigende rekkefølge.

Løsning. Vi finner (eller anslår) hver verdi:

- $\lg 1 = 0$ (siden $10^0 = 1$).
- $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ \approx 0{,}34$.
- $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$.
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Stigende rekkefølge:

$$\boxed{\lg 1 \;<\; \sin 160^\circ \;<\; \sin 60^\circ \;<\; \left(\tfrac{3}{4}\right)^{-1}}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x-6}{x+3} - \dfrac{18}{x^2-9}$.

Løsning. Felles nevner er $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Vi utvider hver brøk:

$$\frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x-6)(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{18}{(x-3)(x+3)}.$$

Teller: $x(x+3) + (x-6)(x-3) - 18 = (x^2+3x) + (x^2-9x+18) - 18 = 2x^2 - 6x = 2x(x-3)$.

$$\frac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x}{x+3}.$$

$$\boxed{\frac{2x}{x+3}} \qquad (x \neq \pm 3)$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Bestem en andregradsulikhet der alle $x \in [-4, 2]$ er løsninger.

Løsning. Vi ønsker en parabel som er negativ (eller null) på intervallet $[-4, 2]$. Da må parabelen ha nullpunkter i $x = -4$ og $x = 2$ og åpne oppover, slik at uttrykket er ≤ 0 *mellom* nullpunktene:

$$(x+4)(x-2) \leq 0.$$

Utvidet:

$$\boxed{x^2 + 2x - 8 \leq 0}$$

Kontroll: $(x+4)(x-2) \leq 0$ akkurat når $-4 \leq x \leq 2$. ✓

Oppgave 5 (2 poeng)

Oppgave. Figuren viser grafen til en andregradsfunksjon f (parabel som åpner oppover, nullpunkter i $x = -1$ og $x = 2$, skjærer y-aksen i -2). Bestem $f(x)$.

Løsning. Grafen har nullpunkter i $x = -1$ og $x = 2$, så

$$f(x) = a(x+1)(x-2).$$

Grafen skjærer y-aksen i $(0, -2)$, altså $f(0) = -2$:

$$f(0) = a(0+1)(0-2) = -2a = -2 \implies a = 1.$$

Dermed

$$f(x) = (x+1)(x-2) = \boxed{x^2 - x - 2}.$$

Kontroll: bunnpunkt i $x = \frac{1}{2}$ med $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} = -2{,}25$, som stemmer med figuren.

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. $f(x) = -2x + 9$. Grafen til g er en rett linje parallell med grafen til f og går gjennom $(20, -72)$. Bestem $g(x)$.

Løsning. Parallelle linjer har samme stigningstall, så $g(x) = -2x + b$. Vi setter inn punktet $(20, -72)$:

$$-72 = -2 \cdot 20 + b \implies -72 = -40 + b \implies b = -32.$$

$$\boxed{g(x) = -2x - 32}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Skriv så enkelt som mulig: $3^{-2} \cdot \dfrac{a^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{a^3}}{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3 \cdot a^0}$.

Løsning. Vi samler potensene av a. Husk $\sqrt{a^3} = a^{3/2}$, $\left(a^{3/4}\right)^3 = a^{9/4}$ og $a^0 = 1$:

$$\frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{9}{4}}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}} = a^{\frac{1+6-9}{4}} = a^{-\frac{1}{2}}.$$

Med $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ får vi

$$3^{-2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \boxed{\frac{1}{9\sqrt{a}}} \qquad (a > 0).$$

Oppgave 8 (2 poeng)

Oppgave. Løs likningene a) $3^{2x+2} = 81$ og b) $\lg\left(\dfrac{1}{2x+2}\right) = -2$.

a) Skriv $81 = 3^4$. Da har potensene samme grunntall:

$$3^{2x+2} = 3^4 \implies 2x + 2 = 4 \implies x = \boxed{1}.$$

b) $\lg u = -2$ betyr $u = 10^{-2} = \dfrac{1}{100}$. Altså

$$\frac{1}{2x+2} = \frac{1}{100} \implies 2x + 2 = 100 \implies 2x = 98 \implies x = \boxed{49}.$$

Oppgave 9 (4 poeng)

Oppgave. Våren 2020: 120 elever på Vg1 og 150 elever på Vg3. To av fem på Vg1 og tre av fem på Vg3 var fornøyde med hjemmeundervisningen. a) Lag en krysstabell. b) Sannsynligheten for at en tilfeldig elev som deltok var fornøyd. c) En journalist velger tilfeldig en av de fornøyde; sannsynligheten for at eleven gikk på Vg3.

a) Krysstabell. Fornøyde: Vg1: $\frac{2}{5} \cdot 120 = 48$, Vg3: $\frac{3}{5} \cdot 150 = 90$. Resten er ikke fornøyde.

	Fornøyd	Ikke fornøyd	Sum
Vg1	48	72	120
Vg3	90	60	150
Sum	138	132	270

b) Totalt $120 + 150 = 270$ elever, hvorav $48 + 90 = 138$ var fornøyde:

$$P(\text{fornøyd}) = \frac{138}{270} = \frac{23}{45} \approx \boxed{0{,}51}.$$

c) Av de 138 fornøyde gikk 90 på Vg3:

$$P(\text{Vg3} \mid \text{fornøyd}) = \frac{90}{138} = \frac{15}{23} \approx \boxed{0{,}65}.$$

Oppgave 10 (3 poeng)

Oppgave. En trekant har to sider 5 og 12 med mellomliggende vinkel v. Arealet er 15. Bestem v.

Løsning. Arealsetningen gir

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sin v = 30 \sin v.$$

Setter $A = 15$:

$$30 \sin v = 15 \implies \sin v = \frac{1}{2}.$$

Siden v er en vinkel i en trekant, og figuren viser en spiss vinkel, er

$$\boxed{v = 30^\circ}.$$

(Generelt gir $\sin v = \frac{1}{2}$ også $v = 150^\circ$, men figuren viser en spiss vinkel.)

Oppgave 11 (2 poeng)

Oppgave. En 1 kg pose inneholder marsipan og sjokolade. Marsipan koster 140 kr/kg å lage, sjokolade 100 kr/kg. Posen selges for 166 kr med 50 kr fortjeneste. Hvor mye marsipan og sjokolade er i posen?

Løsning. La $m =$ kg marsipan og $s =$ kg sjokolade. Posen veier 1 kg, og kostnaden er $166-50 = 116$ kr:

$$m + s = 1$$
$$140m + 100s = 116$$

Fra første likning er $s = 1 - m$. Sett inn:

$$140m + 100(1-m) = 116 \implies 40m + 100 = 116 \implies 40m = 16 \implies m = 0{,}4.$$

Da er $s = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

$$\boxed{\text{0,4 kg marsipan og 0,6 kg sjokolade}}$$

Oppgave 12 (4 poeng)

Oppgave. To trekanter er tegnet i et rutenett (hver rute er et kvadrat). Den nederste har en rett vinkel og en vinkel v; den øverste har en vinkel u. Vis at $\cos u = \cos v$.

Løsning. Vi legger inn et koordinatsystem der hver rute er én enhet.

Nederste trekant (vinkel v). Den er rettvinklet. Fra figuren har den to kateter: en vannrett av lengde 3 og en loddrett av lengde 1, og vinkelen v ligger ved enden av den vannrette kateten. Hypotenusen er

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Den vannrette kateten (3) er *hosliggende* katet til v, så

$$\cos v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Øverste trekant (vinkel u). Fra figuren går de to sidene fra toppunktet (der u ligger) til to gitterpunkter. Sidelengdene blir, ved Pytagoras i rutenettet,

$$\text{side } 1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \qquad \text{side } 2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

og den motstående siden (mellom de to gitterpunktene) har lengde 1. Cosinussetningen i toppunktet gir

$$\cos u = \frac{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 1^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{5+8-1}{4\sqrt{10}} = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Begge uttrykkene er like, altså

$$\boxed{\cos u = \cos v = \frac{3\sqrt{10}}{10}} \qquad \text{(begge vinklene er } \approx 18{,}4^\circ\text{)}.$$

Oppgave 13 (3 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. Vis at den momentane vekstfarten i $(3,\ f(3))$ er lik den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[-3,\ 0]$.

Løsning. Momentan vekstfart er $f'(3)$. Vi deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \implies f'(3) = 3 \cdot 9 - 4 \cdot 3 - 4 = 27 - 12 - 4 = 11.$$

Gjennomsnittlig vekstfart i $[-3,\ 0]$:

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)}.$$

Her er $f(0) = 8$ og

$$f(-3) = (-27) - 2 \cdot 9 - 4 \cdot (-3) + 8 = -27 - 18 + 12 + 8 = -25.$$

Dermed

$$\frac{8 - (-25)}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

Begge er 11, så

$$\boxed{f'(3) = 11 = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)}}.$$

Oppgave 14 (4 poeng)

Oppgave. $f(x) = x^2 + 21$. Rektangelet $ABCD$ har $A(x, 0)$, $B(12, 0)$ og D på grafen til f. Bestem det største arealet rektangelet kan ha når $x \in \langle 0,\ 12 \rangle$.

Løsning. Bredden er $AB = 12 - x$ og høyden er $AD = f(x) = x^2 + 21$. Arealet blir

$$A(x) = (12 - x)(x^2 + 21) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 252.$$

Maksimum finnes der $A'(x) = 0$:

$$A'(x) = -3x^2 + 24x - 21 = -3(x^2 - 8x + 7) = -3(x - 1)(x - 7).$$

Nullpunkter $x = 1$ og $x = 7$. Fortegnsanalyse: $A'(x) > 0$ for $1 < x < 7$ og $A'(x) < 0$ for $x > 7$, så $x = 7$ gir et toppunkt. (I $x = 1$ er det et bunnpunkt.) Arealet der:

$$A(7) = (12 - 7)(7^2 + 21) = 5 \cdot 70 = 350.$$

$$\boxed{\text{Størst areal} = 350 \text{ for } x = 7}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Oppgave. Antall cruiseturister (i tusen) til norske havner x år etter 2010 modelleres for $x \in [0, 10]$ av

$$f(x) = -2{,}98x^5 + 64{,}7x^4 - 470x^3 + 1250x^2 - 600x + 2123.$$

a) Tegn grafen. b) Gjennomsnittlig vekstfart i $[0, 9]$ med tolkning. c) Momentan vekstfart for $x = 4$ og $x = 8$ med tolkning.

a) Grafen. Tegnes med digitalt verktøy (GeoGebra) for $x \in [0, 10]$. Grafen starter i $f(0) = 2123$, stiger med noen svingninger til en topp rundt $x = 9$ ($f(9) \approx 3874$) og faller deretter bratt mot $x = 10$ (der $f(10) \approx 123$), i samsvar med målepunktene i figuren.

b) Gjennomsnittlig vekstfart i $[0, 9]$:

$$\frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{3873{,}68 - 2123}{9} \approx \frac{1750{,}68}{9} \approx \boxed{194{,}5}.$$

Tolkning: I gjennomsnitt økte antallet cruiseturister med ca. 194,5 tusen ($\approx 195\,000$) turister per år fra 2010 til 2019.

c) Momentan vekstfart. Vi deriverer:

$$f'(x) = -14{,}9x^4 + 258{,}8x^3 - 1410x^2 + 2500x - 600.$$

$$f'(4) = \boxed{-411{,}2}, \qquad f'(8) = \boxed{635{,}2}.$$

Tolkning: I 2014 ($x = 4$) *sank* antallet cruiseturister med ca. 411 tusen per år, mens det i 2018 ($x = 8$) *økte* med ca. 635 tusen per år. Modellen viser altså nedgang midt i perioden og kraftig vekst mot slutten.

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Vis at det finnes to trekanter som *ikke* er formlike, og som begge har en side 4, en side 8 og areal $8\sqrt{3}$.

Løsning. La v være vinkelen *mellom* sidene 4 og 8. Arealsetningen gir

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin v = 16 \sin v.$$

Setter $A = 8\sqrt{3}$:

$$16 \sin v = 8\sqrt{3} \implies \sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Denne likningen har **to** løsninger for en trekantvinkel:

$$v = 60^\circ \qquad \text{eller} \qquad v = 120^\circ.$$

Begge gir en gyldig trekant med sider 4 og 8 og areal $8\sqrt{3}$. De er ikke formlike, fordi den tredje siden blir forskjellig (cosinussetningen):

$$\begin{aligned} v = 60^\circ: &\quad c = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cos 60^\circ} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93, \\ v = 120^\circ: &\quad c = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cos 120^\circ} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7} \approx 10{,}58. \end{aligned}$$

Trekantene har ulike vinkler (60° mot 120°), så de er **ikke formlike**.

$$\boxed{\text{To trekanter: mellomliggende vinkel } 60^\circ \text{ og } 120^\circ}$$

Oppgave 3 (3 poeng)

Oppgave. Scott har 6 hvite og 10 røde drops. Han trekker tilfeldig 2 drops. Vis at det er like stor sannsynlighet for to like som for to ulike farger.

Løsning. Totalt er det $6 + 10 = 16$ drops. Antall måter å trekke 2 av 16:

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

To av samme farge (begge hvite *eller* begge røde):

$$\binom{6}{2} + \binom{10}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{10 \cdot 9}{2} = 15 + 45 = 60.$$

To av ulik farge (én hvit og én rød):

$$6 \cdot 10 = 60.$$

Begge gir 60 gunstige utfall, altså

$$P(\text{lik}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = \frac{60}{120} = P(\text{ulik}).$$

$$\boxed{P(\text{samme farge}) = P(\text{ulik farge}) = \tfrac{1}{2}}$$

Oppgave 4 (6 poeng)

Oppgave. Trekanttallene $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $T_5 = 15, \ldots$. a) Forklar ut fra figuren at $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. b) Vis at $T_{n+1} = \dfrac{n^2+3n+2}{2}$. c) Bruk CAS til å vise at med $\dfrac{n^2+n}{2}$ hvite og $\dfrac{n^2+3n+2}{2}$ røde drops er det like stor sannsynlighet for to like som for to ulike farger.

a) Trekanttall nummer n er $T_n = 1+2+3+\cdots+n$. Figuren viser et triks: dersom vi setter to like trekanter sammen (den ene snudd opp-ned), danner de et rektangel med n rader og $n+1$ kuler i hver rad — altså $n(n+1)$ kuler. Hver trekant er halvparten:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Vi bytter n med $n+1$ i formelen for T_n:

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

$$\boxed{T_{n+1} = \frac{n^2+3n+2}{2}}$$

c) La det hvite antallet være $h = T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ og det røde $r = T_{n+1} = \dfrac{n^2+3n+2}{2}$. Da er totalt antall

$$N = h + r = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{2n^2+4n+2}{2} = (n+1)^2.$$

Vi sammenligner antall gunstige utfall for «to like» og «to ulike» (telleren er den samme i begge sannsynlighetene, $\binom{N}{2}$):

$$\text{lik:} \quad \binom{h}{2} + \binom{r}{2}, \qquad \text{ulik:} \quad h \cdot r.$$

I CAS legger man inn $h = \frac{n^2+n}{2}$ og $r = \frac{n^2+3n+2}{2}$ og regner ut differansen:

$$\binom{h}{2} + \binom{r}{2} - h\,r = \frac{h(h-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2} - h\,r.$$

CAS forenkler dette til **0** for alle n. Altså er antall gunstige utfall like, og dermed

$$P(\text{samme farge}) = P(\text{ulik farge}).$$

Med $n = 3$ får vi $h = 6$ og $r = 10$, som er nettopp Scotts krukke i oppgave 3. Verifisering i Python (CAS):

```python
import sympy as sp
n = sp.symbols('n', positive=True, integer=True)
h = (n**2 + n) / 2          # hvite = T_n
r = (n**2 + 3*n + 2) / 2    # røde  = T_(n+1)
C = lambda k: k*(k - 1)/2   # antall måter å velge 2

lik  = C(h) + C(r)
ulik = h * r
print(sp.simplify(lik - ulik))   # 0  -> alltid likt
```

$$\boxed{\binom{h}{2} + \binom{r}{2} = h \cdot r \quad \text{for alle } n \implies P(\text{lik}) = P(\text{ulik})}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. Regulær femkant $ABCDE$ med sidelengde s og alle vinkler 108°. a) Vis med CAS og cosinussetningen at $AC = \frac{1}{2}s\,(\sqrt{5}+1)$. b) Vis det samme med sinussetningen. c) Bestem en eksakt verdi for arealet av femkanten uttrykt ved s.

a) Cosinussetningen. Diagonalen AC er den tredje siden i trekant ABC, der $AB = BC = s$ og den mellomliggende vinkelen er $\angle B = 108^\circ$:

$$AC^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \cos 108^\circ = 2s^2\big(1 - \cos 108^\circ\big).$$

Med den eksakte verdien $\cos 108^\circ = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$:

$$AC^2 = 2s^2\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = 2s^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4} = \frac{s^2(6+2\sqrt{5})}{4}.$$

Siden $6 + 2\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^2$, blir

$$AC = \frac{s}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{s}{2}\,(1+\sqrt{5}) = \boxed{\tfrac{1}{2}s\,(\sqrt{5}+1)}.$$

b) Sinussetningen. I den likebeinte trekant ABC er $\angle B = 108^\circ$, så de to grunnvinklene er $\angle BAC = \angle BCA = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Sinussetningen gir

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)} \implies AC = s \cdot \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}.$$

Med $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$ forkortes $\sin 36^\circ$:

$$AC = s \cdot \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2s\cos 36^\circ.$$

Den eksakte verdien er $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, så

$$AC = 2s \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}s\,(\sqrt{5}+1)}.$$

(CAS bekrefter at begge uttrykk gir samme eksakte verdi $\frac{1}{2}s(\sqrt{5}+1) \approx 1{,}618\,s$.)

c) Arealet. En regulær femkant kan deles i 5 kongruente trekanter fra sentrum, eller man kan bruke arealformelen for en regulær n-kant. Med CAS:

$$A = \frac{5}{4}s^2 \cot 36^\circ = \frac{5s^2}{4\tan 36^\circ}.$$

Den eksakte verdien blir

$$\boxed{A = \frac{s^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \approx 1{,}7205\,s^2.$$

Kontroll i CAS: $\dfrac{5}{4}s^2\cot 36^\circ = \dfrac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,s^2$, og for $s=1$ gir begge $\approx 1{,}7205$. ✓
