

Matematikk 1T — Vår 2021

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

Eksamen er delt i tre **oppgavetyper**. Oppgavetype 1 (oppgave 1–8) tilsvarer **Del 1** — **uten hjelpemidler**. Oppgavetype 2 og 3 (oppgave 9–16) tilsvarer **Del 2** — **med hjelpemidler**, der oppgavetype 3 er utforskende oppgaver.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Funksjonen $f(x) = ax + 8$. Bestem a slik at grafen går gjennom punktet $(4, 4)$.

Løsning. Punktet ligger på grafen, så $f(4) = 4$:

$$a \cdot 4 + 8 = 4 \implies 4a = -4 \implies a = -1.$$

$$\boxed{a = -1}$$

Oppgave 2 (Oppgavetype 1)

Oppgave. I trekant ABC er $\angle B = 90^\circ$, $AC = 10$ og $\sin A = \frac{3}{5}$. Bestem lengden av BC .

Løsning. Siden trekanten er rettvinklet i B , er AC hypotenusen, og BC er kateten motstående vinkel A . Da er

$$\sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{BC}{AC}.$$

Vi løser for BC :

$$BC = AC \cdot \sin A = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6.$$

$$\boxed{BC = 6}$$

Oppgave 3 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Bestem en verdi for k slik at divisjonen $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x + k)$ går opp.

Løsning. Divisjonen går opp dersom $x = -k$ er et nullpunkt for $x^3 + x^2 - 2x - 8$ (faktorteoremet). Vi prøver heltallsdelere av konstantleddet -8 . Med $x = 2$:

$$2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 8 = 8 + 4 - 4 - 8 = 0,$$

så $x = 2$ er et nullpunkt, og $(x - 2)$ er en faktor. Da må $-k = 2$, altså $k = -2$. (Den andre faktoren blir $x^2 + 3x + 4$, som ikke har reelle nullpunkter, så dette er den eneste heltallsverdien.)

$$\boxed{k = -2}$$

Oppgave 4 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Bestem k slik at likningen $x^2 + 2kx - 2k - 1 = 0$ har **én** løsning.

Løsning. En andregradslikning har nøyaktig én løsning når diskriminanten er null:

$$D = (2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k - 1) = 4k^2 + 8k + 4 = 4(k + 1)^2.$$

$$D = 0 \implies (k + 1)^2 = 0 \implies k = -1.$$

$$\boxed{k = -1}$$

Oppgave 5 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Ester kan leie bil hos firma A eller firma B (graf gitt). Firma A er fast pris uansett kjørelengde; firma B er en stigende rett linje. Hvor langt må hun kjøre på et døgn for at prisen blir lik?

Løsning. Fra diagrammet leser vi av:

- **Firma A** er en vannrett linje (fast pris): $A(x) = 1200$ kr.
- **Firma B** er en rett linje som starter i $(0, 500)$ og går gjennom $(40, 600)$. Stigningstallet er $\frac{600 - 500}{40} = \frac{100}{40} = \frac{10}{4} = 2,5$, altså $B(x) = \frac{10}{4}x + 500 = 2,5x + 500$.

Prisene er like når $A(x) = B(x)$:

$$1200 = 2,5x + 500 \implies 2,5x = 700 \implies x = \frac{700 \cdot 4}{10} = 280.$$

$$\boxed{x = 280 \text{ km}}$$

(Linjene møtes utenfor det viste området på grafen, men avlesningen av startverdi 500 og stigning 2,5 kr/km gir skjæring ved 280 km.)

Oppgave 6 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Gitt to brøker $\frac{m}{n}$ og $\frac{m+2}{n+2}$, der $m, n \in \mathbb{N}$ og $n > m$. Hvilken påstand er riktig? (Flervalg.)

Løsning. Vi sammenligner ved å trekke fra hverandre med felles nevner:

$$\frac{m+2}{n+2} - \frac{m}{n} = \frac{n(m+2) - m(n+2)}{n(n+2)} = \frac{nm + 2n - mn - 2m}{n(n+2)} = \frac{2(n-m)}{n(n+2)}.$$

Siden $n > m$ er teller $2(n-m) > 0$, og nevner $n(n+2) > 0$ (begge positive naturlige tall). Differansen er dermed **positiv**, så

$$\frac{m+2}{n+2} > \frac{m}{n} \iff \frac{m}{n} < \frac{m+2}{n+2}.$$

Riktig påstand:

$$\boxed{\frac{m}{n} < \frac{m+2}{n+2}}$$

Forklaring: Når $n > m$ er $\frac{m}{n}$ en ekte brøk (mindre enn 1). Å legge til 2 i både teller og nevner flytter brøken nærmere 1, altså gjør den større.

Oppgave 7 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Funksjonen $f(x) = -5x^2 + ax + 1$ har et toppunkt i $(2, f(2))$. Bestem a .

Løsning. I et toppunkt er den deriverte lik null. Vi deriverer:

$$f'(x) = -10x + a.$$

Krav $f'(2) = 0$:

$$-10 \cdot 2 + a = 0 \implies a = 20.$$

$$\boxed{a = 20}$$

Oppgave 8 (Oppgavetype 1)

Oppgave. Bestem r , s og t slik at $4x^2 + 16x + r = (sx + t)^2$ blir en identitet.

Løsning. Vi utvider høyresiden:

$$(sx + t)^2 = s^2x^2 + 2stx + t^2.$$

Sammenlign koeffisienter ledd for ledd:

- x^2 -ledd: $s^2 = 4 \Rightarrow s = 2$ (velger positiv verdi).
- x -ledd: $2st = 16 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot t = 16 \Rightarrow t = 4$.
- konstantledd: $r = t^2 = 4^2 = 16$.

$$r = 16, \quad s = 2, \quad t = 4$$

(Også $s = -2$, $t = -4$, $r = 16$ er en gyldig løsning, siden $(-2x - 4)^2 = (2x + 4)^2$.)

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 9 (Oppgavetype 2)

Oppgave. En skål med blåbærgelé avkjøles i et rom på 20°C . En tabell viser temperaturen T etter x minutter (8 målepunkter fra 4 til 90 min). a) Lag en modell $T(x) = a \cdot b^x$. b) Hvilket gyldighetsområde kan modellen ha?

a) Vi bruker eksponentiell regresjon (CAS/graftegner) på måledataene. Det gir omtrent

$$T(x) \approx 92,5 \cdot 0,990^x$$

Modellen passer godt med dataene — den treffer alle målepunktene innenfor noen få tideler:

x (min)	4	8	16	20	40	60	75	90
Målt T	90,6	86,5	78,9	75,4	61,0	50,3	44,1	39,2
Modell $T(x)$	89,0	85,5	79,1	76,0	62,4	51,3	44,2	38,2

b) **Gyldighetsområde.** Modellen $T(x) = a \cdot b^x$ går mot 0 når x blir stor. Men en gelé i et rom på 20°C kan aldri bli kaldere enn romtemperaturen — den nærmer seg 20°C , ikke 0°C . Modellen gir derfor for lave verdier for store x .

Vi finner når modellen passerer 20°C :

$$92,5 \cdot 0,990^x = 20 \Rightarrow 0,990^x = \frac{20}{92,5} \Rightarrow x = \frac{\ln(20/92,5)}{\ln 0,990} \approx 152 \text{ min.}$$

Modellen er altså bare brukbar fra geleen settes til avkjøling og fram til temperaturen nærmer seg romtemperaturen, omtrent

$$0 \leq x \lesssim 152 \text{ minutter}$$

For x utenfor dette gir modellen urealistiske temperaturer (under romtemperatur). (Den offisielle fasiten oppgir 155,7 min; forskjellen skyldes at fasiten bruker en uavrundet regresjonsbase ($\approx 0,9902$), mens vi her regner med den oppgitte, avrundede modellen $0,990^x$. Begge gir samme konklusjon om gyldighetsområdet.)

Oppgave 10 (Oppgavetype 2)

Oppgave. En parabel er skissert med nullpunkter i $x = -2$ og $x = 3$ (åpner oppover). Vis og gjør rede for hvordan skissen kan brukes til å løse ulikheten $x^2 - x > 6$.

Løsning. Vi flytter alt over på én side:

$$x^2 - x > 6 \iff x^2 - x - 6 > 0.$$

Funksjonen $g(x) = x^2 - x - 6$ er nettopp parabolen i skissen. Vi finner nullpunktene:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) = 0 \implies x = -2 \text{ eller } x = 3,$$

som stemmer med skissen. Parabolen åpner oppover, så grafen ligger **over** x -aksen ($g(x) > 0$) til *venstre* for det venstre nullpunktet og til *høyre* for det høyre nullpunktet:

$$g(x) > 0 \quad \text{når} \quad x < -2 \text{ eller } x > 3.$$

$$\boxed{x < -2 \text{ eller } x > 3}$$

Fra skissen ser man dette direkte: den delen av parabolen som ligger over x -aksen, svarer til løsningen av ulikheten.

Oppgave 11 (Oppgavetype 2)

Oppgave. Figurene er laget av fyrstikker. Figur n består av et $n \times n$ -rutenett av små kvadrater (figur 1: 1 kvadrat, figur 2: 4 kvadrater, figur 3: 9 kvadrater). Du har 10 000 fyrstikker. a) Hvor mange figurer kan du lage (én i hver størrelse)? b) Hvor mange fyrstikker har du igjen etter den siste?

Antall fyrstikker i figur n . I et $n \times n$ -rutenett er det $(n + 1)$ vannrette linjer med n fyrstikker hver, og $(n + 1)$ loddrette linjer med n fyrstikker hver:

$$P(n) = 2n(n + 1).$$

Kontroll: $P(1) = 4$, $P(2) = 12$, $P(3) = 24$ — stemmer med figurene.

Sum av de første n figurene.

$$S(n) = \sum_{k=1}^n 2k(k + 1) = \frac{2n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

a) Vi trenger den største n med $S(n) \leq 10\,000$. Vi regner:

$$S(23) = \frac{2 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{3} = 9200, \quad S(24) = \frac{2 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{3} = 10\,400.$$

Siden $S(24) > 10\,000$, rekker fyrstikkene til figur 23, men ikke figur 24.

23 figurer

b) Fyrstikker igjen:

$$10\,000 - S(23) = 10\,000 - 9200 = 800.$$

800 fyrstikker igjen

Program. Programmet summerer fyrstikkene figur for figur til summen overstiger 10 000.

```
total = 0
n = 0
while True:
    n += 1
    p = 2 * n * (n + 1)           # fyrstikker i figur n
    if total + p > 10000:
        n -= 1                   # denne figuren får vi ikke laget
        break
    total += p
print("Antall figurer:", n)      # 23
print("Fyrstikker igjen:", 10000 - total) # 800

#include <iostream>
int main() {
    int total = 0, n = 0;
    while (true) {
        n += 1;
        int p = 2 * n * (n + 1); // fyrstikker i figur n
        if (total + p > 10000) { n -= 1; break; }
        total += p;
    }
    std::cout << "Antall figurer: " << n << "\n"; // 23
    std::cout << "Fyrstikker igjen: " << 10000 - total << "\n"; // 800
    return 0;
}
```

Oppgave 12 (Oppgavetype 2)

Oppgave. I dag ($x = 0$) er det 280 kaniner i et område. En sykdom sprer seg, og om 20 måneder er det bare 40 kaniner igjen. a) Lag en modell dersom antallet avtar **lineært**. b) Lag en modell dersom antallet avtar **eksponentielt**.

a) **Lineær modell.** $L(x) = ax + b$ med $b = L(0) = 280$. Stigningstallet er

$$a = \frac{40 - 280}{20 - 0} = \frac{-240}{20} = -12.$$

$$L(x) = 280 - 12x$$

Antallet synker med 12 kaniner per måned. (Modellen er gyldig fram til $L(x) = 0$, dvs. ved $x = \frac{280}{12} \approx 23,3$ måneder.)

b) **Eksponentiell modell.** $E(x) = 280 \cdot k^x$ med $E(20) = 40$:

$$280 \cdot k^{20} = 40 \implies k^{20} = \frac{40}{280} = \frac{1}{7} \implies k = \left(\frac{1}{7}\right)^{1/20} \approx 0,907.$$

$$E(x) = 280 \cdot 0,907^x$$

Antallet synker med ca. 9,3% per måned.

Oppgave 13 (Oppgavetype 2)

Oppgave. $f(x) = x^3 - x - 1$. Grafen har to tangenter som er parallelle med linjen $y = \frac{1}{2}x + 2$. Bestem skjæringspunktet med x -aksen for hver av disse tangentene **eksakt**.

Løsning. Tangenter parallelle med $y = \frac{1}{2}x + 2$ har stigningstall $\frac{1}{2}$. Vi finner punktene der $f'(x) = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = \frac{1}{2} \implies 3x^2 = \frac{3}{2} \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tangent 1 i $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funksjonsverdien:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{4} - 1.$$

Tangentlinjen: $y = \frac{1}{2}(x - x_1) + f(x_1)$. Skjæring med x -aksen ($y = 0$):

$$x = x_1 - 2f(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Tangent 2 i $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Funksjonsverdien:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - 1.$$

Skjæring med x -aksen:

$$x = x_2 - 2f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 + \sqrt{2}.$$

$$x = 2 - \sqrt{2} \quad \text{og} \quad x = 2 + \sqrt{2}$$

(Numerisk: $x \approx 0,59$ og $x \approx 3,41$.)

Oppgave 14 (Oppgavetype 2)

Oppgave. La f og g være to andregradspolynomer med «omvendt rekkefølge» på koeffisientene, f.eks. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ og $g(x) = 6x^2 - 5x + 1$. a) Finn sammenhengen mellom nullpunktene til slike polynomer. b) Bevis at sammenhengen gjelder for alle slike polynomer.

a) **Sammenhengen.** For eksemplet:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) \Rightarrow \text{nullpunkter } x = 2, x = 3, \\g(x) &= 6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1) \Rightarrow \text{nullpunkter } x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nullpunktene til g er **de inverse (resiproke) av nullpunktene til f** : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Nullpunktene til } g \text{ er } \frac{1}{x} \text{ for hvert nullpunkt } x \text{ til } f.$$

b) **Bevis.** La $f(x) = ax^2 + bx + c$ med $a, c \neq 0$. «Omvendt rekkefølge» betyr

$$g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Anta at p er et nullpunkt for f , altså $f(p) = ap^2 + bp + c = 0$. Da er $p \neq 0$ (ellers ville $c = 0$). Vi deler likningen på p^2 :

$$\frac{ap^2 + bp + c}{p^2} = a + b \cdot \frac{1}{p} + c \cdot \frac{1}{p^2} = 0.$$

Skriver vi om leddene, blir dette

$$c \left(\frac{1}{p}\right)^2 + b \left(\frac{1}{p}\right) + a = 0,$$

som er nettopp $g\left(\frac{1}{p}\right) = 0$. Altså er $\frac{1}{p}$ et nullpunkt for g . Dette gjelder for **hvert** nullpunkt p til f , så nullpunktene til g er de resiproke av nullpunktene til f . ■

Oppgave 15 (Oppgavetype 3)

Oppgave. Utforsk skjæringspunktene mellom $f(x) = ax$ og $g(x) = \frac{b}{x}$. Koordinatene skal være positive hele tall (eksempler i figuren: (1, 1) og (3, 9)). Hvilke verdier av $a, b \in \mathbb{N}$ gir et skjæringspunkt der begge koordinatene er positive hele tall?

Generell utregning. Skjæringspunktet finnes der $f(x) = g(x)$:

$$ax = \frac{b}{x} \implies x^2 = \frac{b}{a} \implies x = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (x > 0).$$

y -koordinaten blir

$$y = ax = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

Altså er skjæringspunktet

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{ab}\right).$$

Utforsking. Vi vil ha begge koordinatene som positive hele tall. La $x = k$ være et positivt heltall. Da må

$$k = \sqrt{\frac{b}{a}} \implies \frac{b}{a} = k^2 \implies b = a k^2.$$

Med dette blir y -koordinaten automatisk et heltall:

$$y = \sqrt{ab} = \sqrt{a \cdot ak^2} = ak,$$

som er et helt tall siden a og k er det. Skjæringspunktet er da (k, ak) .

Vi prøver oss fram (begynner med $a = 1$):

a	$b = ak^2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)	Skjæringspunkt (k, ak)
1	1, 4, 9, 16, ...	(1, 1), (2, 2), (3, 3), ...
2	2, 8, 18, 32, ...	(1, 2), (2, 4), (3, 6), ...
3	3, 12, 27, 48, ...	(1, 3), (2, 6), (3, 9), ...

Eksemplene i figuren passer: $(1, 1)$ får vi med $a = 1$, $b = 1$, og $(3, 9)$ får vi med $a = 3$, $b = 27$ (siden $y = ak = 3 \cdot 3 = 9$).

Konklusjon.

For $a \in \mathbb{N}$ gir $b = ak^2$, $k \in \mathbb{N}$, skjæringspunkt (k, ak) med hele tall.

Med andre ord: skjæringspunktet har positive heltallskoordinater nøyaktig når $\frac{b}{a}$ er et **kvadrattall** (slik at $\sqrt{b/a}$ blir et helt tall); $y = ak$ er da alltid helt.

Program (lister opp gyldige (a, b) og skjæringspunktene).

```
for a in range(1, 6):           # velg a = 1, 2, 3, ...
    for k in range(1, 6):      # x-koordinat k = 1, 2, 3, ...
        b = a * k * k
        x, y = k, a * k
        print(f"a={a}, b={b} -> skjaering ({x}, {y})")
# a=1, b=1 -> skjaering (1, 1)
# a=3, b=27 -> skjaering (3, 9) (blant utskriftene)
```

```

#include <iostream>
int main() {
    for (int a = 1; a <= 5; ++a)           // velg a = 1, 2, 3, ...
        for (int k = 1; k <= 5; ++k) {    // x-koordinat k
            int b = a * k * k;
            int x = k, y = a * k;
            std::cout << "a=" << a << ", b=" << b
                << " -> skjaering (" << x << ", " << y << ")\\n";
        }
    // a=1, b=1 -> skjaering (1, 1)
    // a=3, b=27 -> skjaering (3, 9) (blant utskriftene)
    return 0;
}

```

Oppgave 16 (Oppgavetype 3)

Oppgave. Siri har brukt cosinussetningen og fått likningen $a^2 = 8^2 + x^2 - 8x$. Undersøk hvordan trekantene som tilfredsstiller likningen kan se ut for ulike verdier av a .

Tolkning av likningen. Cosinussetningen for en trekant der a er siden motstående vinkelen A , og de to andre sidene er 8 og x med mellomliggende vinkel A :

$$a^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos A.$$

Sammenligner vi med $a^2 = 8^2 + x^2 - 8x$, ser vi at

$$2 \cdot 8 \cdot \cos A = 8 \implies \cos A = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \implies A = 60^\circ.$$

Likningen beskriver altså **alle trekantene med én side lik 8, en annen side lik x , og mellomliggende vinkel 60°** . Den tredje siden er a .

Hvordan a avhenger av x . Vi ser på

$$a^2 = x^2 - 8x + 64.$$

Dette er en parabel i x (åpner oppover). Den minste verdien av a^2 får vi i toppunktet for a^2 , dvs. der den deriverte er null:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 8x + 64) = 2x - 8 = 0 \implies x = 4.$$

Da blir

$$a^2 = 16 - 32 + 64 = 48 \implies a_{\min} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$$

Ved $x = 4$ er de to sidene rundt 60° -vinkelen begge lik... $x = 4$ og den andre = 8. La oss undersøke ulike a :

- $a < 4\sqrt{3}$: Da har $x^2 - 8x + 64 = a^2$ ingen reell løsning ($a^2 < 48$). **Ingen trekant** finnes.
- $a = 4\sqrt{3}$: Likningen $x^2 - 8x + 16 = 0$ gir $x = 4$ (dobbelrot). **Nøyaktig én trekant**, med sider 8, 4 og $4\sqrt{3}$ rundt 60° . (Dette er den «smaleste» trekanten.)
- $4\sqrt{3} < a < 8$: Andregradslikningen $x^2 - 8x + (64 - a^2) = 0$ har to positive løsninger (produktet $64 - a^2 > 0$, summen $8 > 0$). **To ulike trekanter** tilfredsstillers likningen.
- $a = 8$: Likningen $x^2 - 8x = 0$ gir $x = 0$ eller $x = 8$. Bare $x = 8$ gir en ekte trekant (sider 8, 8, 8 — likesidet!). **Én trekant**.
- $a > 8$: Likningen $x^2 - 8x + (64 - a^2) = 0$ har én positiv og én negativ løsning ($64 - a^2 < 0$). Bare den positive gir en trekant. **Én trekant**.

Oppsummering.

$$a_{\min} = 4\sqrt{3} \text{ (} x = 4 \text{); } a = 8 \text{ gir likesidet trekant; for } 4\sqrt{3} < a < 8 \text{ finnes to trekanter, ellers (gyldig) én.}$$

For $a < 4\sqrt{3}$ finnes ingen trekant. Når a vokser fra $4\sqrt{3}$ blir den variable siden x stadig lengre (eller kortere) og trekanten «åpner seg»; ved $a = 8$ blir den likesidet, og for $a > 8$ blir siden a den klart lengste.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.