

Matematikk 1T — Vår 2022

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave. a) Løs likningen $(x - 2)(x + 1) = 0$. b) Sett opp en ulikhet som har løsning $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$, og begrunn svaret.

a) Et produkt er null når minst én av faktorene er null:

$$x - 2 = 0 \quad \text{eller} \quad x + 1 = 0 \quad \implies \quad \boxed{x = 2 \quad \text{eller} \quad x = -1}.$$

b) Løsningsmengden $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$ er alt *utenfor* intervallet $[-1, 2]$. En andregradsulikhet med nullpunkter $x = -1$ og $x = 2$ der parabolen åpner oppover er positiv utenfor nullpunktene. Vi bruker faktorene $(x + 1)$ og $(x - 2)$:

$$(x + 1)(x - 2) > 0.$$

Begrunnelse: Uttrykket $(x + 1)(x - 2)$ er null i $x = -1$ og $x = 2$, og siden parabolen vender det hule opp, er den positiv når $x < -1$ eller $x > 2$ — altså nettopp $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

$$\boxed{(x + 1)(x - 2) > 0 \quad \iff \quad x^2 - x - 2 > 0}$$

Merk: Det finnes mange riktige svar; dette er ett eksempel.

Sensorkommentar: Den offisielle fasiten på matematikk.net skriver ved en trykkfeil $(x - 2)(x - 1) > 0$, som ville gitt løsningsmengden $x < 1 \vee x > 2$ — ikke den oppgitte. Fasitens egen tekst («I området fra -1 til 2 er produktet negativt») beskriver nettopp $(x + 1)(x - 2) > 0$, så vårt svar er det riktige.

Oppgave 2

Oppgave. Bestem r og s slik at $9x^2 - 30x + r = (3x - s)^2$ blir en identitet.

Løsning. Vi utvider høyresiden:

$$(3x - s)^2 = 9x^2 - 6sx + s^2.$$

For at dette skal være en identitet må koeffisientene foran like potenser av x stemme overens med $9x^2 - 30x + r$:

- x -ledd: $-6s = -30 \implies s = 5$
- konstantledd: $r = s^2 = 5^2 = 25$

$$\boxed{r = 25, \quad s = 5}$$

Kontroll: $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$. ✓

Oppgave 3

Oppgave. I en rettvinklet trekant ABC er $\tan \angle B = \frac{3}{4}$. Vurder (med begrunnelse) om det kan stemme at: (i) $\sin \angle B = \frac{3}{10}$, (ii) den ene kateten er 6 og den andre 8, (iii) hypotenusen er kortere enn 4.

Grunnlag. $\tan \angle B = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{3}{4}$. En rettvinklet trekant med dette forholdet har kateter $3k$ og $4k$ og dermed hypotenus

$$\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = \sqrt{25k^2} = 5k.$$

(i) **Kan** $\sin \angle B = \frac{3}{10}$? Nei. Med kateter $3k$ og $4k$ og hypotenus $5k$ er

$$\sin \angle B = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}.$$

Siden $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \neq \frac{3}{10}$, kan det **ikke** stemme.

(ii) **Kan kateten være 6 og den andre 8?** Ja. Med $k = 2$ blir katetene $3 \cdot 2 = 6$ og $4 \cdot 2 = 8$, og $\tan \angle B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Det **kan** stemme.

(iii) **Kan hypotenusen være kortere enn 4?** Ja. Hypotenusen er $5k$, og k kan være vilkårlig liten. For eksempel $k = 0,5$ gir kateter 1,5 og 2 og hypotenus $5 \cdot 0,5 = 2,5 < 4$. Det **kan** stemme.

$$\boxed{\text{(i) Nei} \quad \text{(ii) Ja} \quad \text{(iii) Ja}}$$

Oppgave 4

Oppgave. Forklar hva som skjer når programmet under kjøres, og hva resultatet blir.

```
def f(x):  
    return x ** 2      # Definerer funksjonen f gitt ved f(x) = x^2
```

```
x = 1
```

```

while f(x) <= 400:
    print(f(x))
    x = x + 1

```

Løsning. Programmet definerer $f(x) = x^2$. Variabelen x starter på 1. Så lenge $f(x) = x^2 \leq 400$, skrives kvadrattallet x^2 ut, og x økes med 1.

Løkka kjører for $x = 1, 2, 3, \dots$ helt til $x^2 > 400$. Siden $20^2 = 400 \leq 400$ skrives 400 ut, men $21^2 = 441 > 400$, så løkka stopper. Programmet skriver derfor ut kvadrattallene fra 1^2 til 20^2 :

1, 4, 9, 16, 25, ..., 361, 400

altså x^2 for $x = 1, 2, \dots, 20$ (de 20 første kvadrattallene).

Oppgave 5

Oppgave. En rasjonal funksjon f har vertikal asymptote $x = -2$ og horisontal asymptote $y = 3$. Bestem to mulige funksjonsuttrykk for f , og forklar tankegangen.

Tankegang. En rasjonal funksjon $f(x) = \frac{\text{teller}}{\text{nevner}}$ har

- **vertikal asymptote** der nevneren er null (men telleren ikke), så nevneren må ha nullpunkt i $x = -2$, altså inneholde faktoren $(x + 2)$.
- **horisontal asymptote** $y = 3$ når teller og nevner har samme grad og forholdet mellom de ledende koeffisientene er 3.

Eksempel 1 (teller og nevner av første grad, ledende koeffisienter 3 og 1):

$$f(x) = \frac{3x}{x + 2}.$$

Her er nevneren null i $x = -2$ (vertikal asymptote), og for store $|x|$ går $f(x) \rightarrow \frac{3x}{x} = 3$ (horisontal asymptote $y = 3$).

Eksempel 2:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 2}.$$

Samme begrunnelse: vertikal asymptote $x = -2$, og $f(x) \rightarrow 3$ når $|x| \rightarrow \infty$.

$f(x) = \frac{3x}{x + 2}$	og	$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 2}$
---------------------------	----	-------------------------------

Merk: Det finnes uendelig mange riktige svar; det viktige er faktoren $(x + 2)$ i nevneren og koeffisientforholdet 3 mellom ledende ledd.

Oppgave 6

Oppgave. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9$. a) Vis at divisjonen $f(x) : (x-3)$ går opp. b) Gjør beregninger og vurder hvilken av tre oppgitte grafer (A, B, C) som kan være grafen til f .

a) At divisjonen «går opp» betyr at $(x-3)$ er en faktor i $f(x)$, altså at $f(3) = 0$ (faktorteoremet). Vi setter inn:

$$f(3) = 2 \cdot 27 + 9 - 18 \cdot 3 - 9 = 54 + 9 - 54 - 9 = 0.$$

Siden $f(3) = 0$, går divisjonen opp. Polynomdivisjon gir

$$2x^3 + x^2 - 18x - 9 = (x-3)(2x^2 + 7x + 3).$$

b) Vi finner egenskaper ved grafen.

Nullpunkter: Faktoriser videre. $2x^2 + 7x + 3 = (2x+1)(x+3)$, så

$$f(x) = (x-3)(2x+1)(x+3).$$

Nullpunktene er $x = 3$, $x = -\frac{1}{2}$ og $x = -3$. To av nullpunktene er negative (-3 og $-\frac{1}{2}$, tett samlet til venstre for y -aksen), og bare ett er positivt ($x = 3$).

Skjæring med y -aksen: $f(0) = -9$, altså under x -aksen.

Oppførsel for store $|x|$: Ledende ledd $2x^3$ har positiv koeffisient, så grafen går mot $-\infty$ til venstre og mot $+\infty$ til høyre.

Topp-/bunnpunkt: $f'(x) = 6x^2 + 2x - 18$. Setter vi $f'(x) = 0$ får vi $x \approx -1,9$ (toppunkt, $f \approx 15$, til venstre for y -aksen) og $x \approx 1,6$ (bunnpunkt, $f \approx -27$, til høyre for y -aksen).

Det avgjørende kjennetegnet er at de to ekstremalpunktene ligger **omtrent like langt fra y -aksen, på hver sin side** (ca. 1,9 til venstre og 1,6 til høyre). Grafen har altså et toppunkt til venstre for y -aksen (over x -aksen), et bunnpunkt nesten like langt til høyre (under x -aksen), og skjærer y -aksen under origo i -9 . Av de tre grafene er det bare den der ekstremalpunktene ligger nesten symmetrisk om y -aksen som passer — det er **graf C**.

Graf C

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave. En vanntank tappes. $V(x) = 2000 - 2000 \left(1 - \frac{x}{40}\right)^2$ er antall liter tappet ut x minutter etter start, for $0 \leq x \leq 40$. a) Bestem $V(0)$ og tolk. b) Bestem verdimengden. c) Hvor lang tid før halvparten er tappet ut? d) Stigningstall for linjen gjennom $(0, V(0))$ og $(30, V(30))$, med tolkning. e) Tappes det noen gang ut mer enn 105 liter i løpet av ett minutt?

a)

$$V(0) = 2000 - 2000(1 - 0)^2 = 2000 - 2000 = 0.$$

$$\boxed{V(0) = 0}$$

Tolkning: Når tappingen starter ($x = 0$ minutter), er det tappet ut 0 liter — det stemmer med at tappingen akkurat har begynt.

b) Vi skriver V ut: $V(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 100x$. Dette er en parabel som vender det hule ned, med toppunkt der $V'(x) = 100 - \frac{5}{2}x = 0$, altså $x = 40$. På intervallet $[0, 40]$ vokser V fra $V(0) = 0$ til

$$V(40) = 2000 - 2000(1 - 1)^2 = 2000.$$

Funksjonen er voksende på hele definisjonsområdet, så verdimengden er

$$\boxed{V_f = [0, 2000]}$$

altså mellom 0 og 2000 liter (hele tanken tømmes).

c) Halvparten av vannet er $\frac{2000}{2} = 1000$ liter. Vi løser $V(x) = 1000$:

$$2000 - 2000\left(1 - \frac{x}{40}\right)^2 = 1000 \implies \left(1 - \frac{x}{40}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$1 - \frac{x}{40} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = 40\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dette gir $x \approx 11,7$ eller $x \approx 68,3$. Bare $x \approx 11,7$ ligger i $[0, 40]$:

$$\boxed{x \approx 11,7 \text{ minutter}}$$

d) Stigningstallet til linjen gjennom $(0, V(0)) = (0, 0)$ og $(30, V(30))$. Først

$$V(30) = 2000 - 2000\left(1 - \frac{30}{40}\right)^2 = 2000 - 2000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2000 - 125 = 1875.$$

Stigningstallet:

$$a = \frac{V(30) - V(0)}{30 - 0} = \frac{1875 - 0}{30} = 62,5.$$

$$\boxed{a = 62,5}$$

Tolkning: I gjennomsnitt tappes det ut 62,5 liter vann per minutt i løpet av de første 30 minuttene.

e) Antall liter tappet ut i løpet av ett minutt — fra minutt x til $x + 1$ — er

$$V(x+1) - V(x).$$

Med $V(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 100x$ blir dette

$$V(x+1) - V(x) = -\frac{5}{4}((x+1)^2 - x^2) + 100 = -\frac{5}{4}(2x+1) + 100 = \frac{395}{4} - \frac{5}{2}x.$$

Dette uttrykket er størst når x er minst, altså i det første minuttet ($x = 0$):

$$V(1) - V(0) = \frac{395}{4} = 98,75 \text{ liter.}$$

Siden mengden tappet per minutt er størst i starten og bare avtar deretter, blir det aldri tappet ut mer enn 98,75 liter på ett minutt.

Nei — det tappes aldri ut mer enn 105 liter på ett minutt (maks 98,75 liter).

Oppgave 2

Oppgave. Figurene (figur 1, 2, 3 ...) bygges av små klosser etter samme mønster (en trappepyramide). a) Hvor mange klosser trengs til figur 5? b) Hvor mange klosser til de 10 første figurene til sammen? c) Roar har 10 000 klosser, starter med den minste og lager én figur i hver størrelse — hvor mange figurer kan han lage, og hvor mange klosser har han igjen?

Mønster. Figurene er trappepyramider: figur n består av kvadratiske lag stablet oppå hverandre — et 1×1 -lag øverst, så 2×2 , 3×3 , ..., ned til $n \times n$ nederst. Antall klosser i figur n er derfor

$$F(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Kontroll mot bildene: $F(1) = 1$, $F(2) = 1 + 4 = 5$, $F(3) = 1 + 4 + 9 = 14$. ✓

a) Figur 5:

$$F(5) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55.$$

55 klosser

b) Antall klosser til de 10 første figurene til sammen er $\sum_{n=1}^{10} F(n)$. Vi regner det ut (med formelen, regneark eller program):

$$\sum_{n=1}^{10} F(n) = \frac{N(N+1)^2(N+2)}{12} \Big|_{N=10} = \frac{10 \cdot 11^2 \cdot 12}{12} = 10 \cdot 121 = 1210.$$

1210 klosser

c) Roar legger sammen $F(1) + F(2) + \dots$ til summen nærmer seg 10 000. Vi bruker et program (se under) som summerer figurene én etter én og stopper før summen overstiger 10 000. Resultatet er at han kan lage de **17** første figurene, som krever 8721 klosser. (Figur 18 ville krevd $F(18) = 2109$ klosser til, og $8721 + 2109 = 10\,830 > 10\,000$.) Klosser igjen:

$$10\,000 - 8721 = 1279.$$

17 figurer, og 1279 klosser igjen

Program (Python):

```
def figur(n):
    return n * (n + 1) * (2 * n + 1) // 6  # klosser i figur n

# a)
print("Figur 5:", figur(5))                # 55

# b)
print("Sum 1..10:", sum(figur(n) for n in range(1, 11)))  # 1210

# c)
klosser = 10000
antall = 0
n = 1
while klosser - figur(n) >= 0:
    klosser -= figur(n)
    antall += 1
    n += 1
print("Antall figurer:", antall)          # 17
print("Klosser igjen:", klosser)         # 1279
```

Program (C++):

```
#include <iostream>
long long figur(int n) {
    return (long long)n * (n + 1) * (2 * n + 1) / 6;  // klosser i figur n
}
int main() {
    // a)
    std::cout << "Figur 5: " << figur(5) << "\n";    // 55

    // b)
    long long sum = 0;
    for (int n = 1; n <= 10; ++n) sum += figur(n);
    std::cout << "Sum 1..10: " << sum << "\n";      // 1210
}
```

```

// c)
long long klosser = 10000;
int antall = 0, n = 1;
while (klosser - figur(n) >= 0) {
    klosser -= figur(n);
    ++antall;
    ++n;
}
std::cout << "Antall figurer: " << antall << "\n"; // 17
std::cout << "Klosser igjen: " << klosser << "\n"; // 1279
return 0;
}

```

Oppgave 3

Oppgave. Firkanten $ABCD$ er gitt i figuren: $DC = CB = 2a$, $\angle C = \angle DCB = 120^\circ$, $\angle DBA = 75^\circ$ (vinkelen ved B i trekant ABD) og $\angle DAB = 45^\circ$. Diagonalen DB deler firkanten i trekantene ABD og BCD . a) Bestem et eksakt uttrykk for omkretsen av firkanten. b) Vis at forholdet mellom arealet av $\triangle ABD$ og arealet av $\triangle BCD$ er $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

Diagonalen DB . I trekant BCD er $DC = CB = 2a$ og $\angle C = 120^\circ$. Cosinussetningen gir

$$DB^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 4a^2 + 4a^2 - 8a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12a^2,$$

så $DB = \sqrt{12a^2} = 2\sqrt{3}a$.

a) Vi trenger sidene AB og AD . I trekant ABD er $\angle A = \angle DAB = 45^\circ$ og $\angle B = \angle DBA = 75^\circ$, så den tredje vinkelen er

$$\angle ADB = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Sinussetningen i $\triangle ABD$ (med kjent side $DB = 2\sqrt{3}a$ motstående $\angle A$):

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{DB}{\sin \angle A}.$$

$$AB = DB \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{3}a \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6a}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}a.$$

$$AD = DB \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = a(\sqrt{3} + 3).$$

(For AD kan en bruke at $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; resultatet blir $AD = (3 + \sqrt{3})a$.)

Omkretsen av firkanten er $O = AB + BC + CD + DA$:

$$O = 3\sqrt{2}a + 2a + 2a + (3 + \sqrt{3})a = \boxed{(7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})a}$$

b) Areal av $\triangle BCD$ (to sider $2a$ med mellomliggende vinkel 120°):

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a^2.$$

Areal av $\triangle ABD$ (sidene AB og AD med mellomliggende vinkel $\angle A = 45^\circ$):

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2}a \cdot (3 + \sqrt{3})a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Her er $3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$, så

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3(3 + \sqrt{3})a^2 = \frac{3(3 + \sqrt{3})}{2}a^2.$$

Forholdet blir

$$\frac{A_{ABD}}{A_{BCD}} = \frac{\frac{3(3+\sqrt{3})}{2}a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

(Vi brukte $3 + \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.)

$$\boxed{\frac{A_{ABD}}{A_{BCD}} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)} \quad \text{som skulle vises.}$$

Oppgave 4

Oppgave. Stuetemperatur måles x minutter etter at varmen ble skrudd på (tabell 1). a) Tilpass en potensmodell $T_1(x) = a \cdot x^b$. b) Vurder gyldighetsområdet til T_1 . c) Tilpass en eksponentialfunksjon f til de korrigerede tallene i tabell 2 (måling minus 20°C). d) Tegn T_1 og f i samme koordinatsystem og beskriv forskjellen. e) Lag modellen T_2 ved å løfte f opp 20°C (Malenes forslag), og finn temperaturen etter 4 timer ifølge T_2 .

a) Potensregresjon på tallene i tabell 1 (gjort i regneark/CAS) gir

$$\boxed{T_1(x) \approx 1,85 \cdot x^{0,49}}$$

altså $a \approx 1,85$ og $b \approx 0,49$.

b) Potensfunksjonen vokser uten øvre grense når x øker, mens en reell stuetemperatur nærmer seg termostatverdien 20°C og flater ut. Modellen passer derfor bare et stykke fram i tid — den blir feil for store x (den vil etter hvert gi temperaturer over 20°C og fortsette å stige). Et rimelig gyldighetsområde er omtrent fram til temperaturen nærmer seg 20°C , dvs. de første par timene; for større x overvurderer modellen temperaturen.

c) De korrigererte verdiene i tabell 2 er negative og nærmer seg 0 nedenfra (avstanden ned til 20°C minker). Eksponentialregresjon gir

$$f(x) \approx -18,09 \cdot 0,98^x$$

(Mange CAS-verktøy skriver dette som $f(x) \approx -18,09 \cdot e^{-0,020x}$, som er det samme.)

d) Begge grafene starter lavt og stiger. Forskjellen:

- $T_1(x) = 1,85x^{0,49}$ (potens) **fortsetter å stige uten grense** — den har ingen øvre asymptote og krysser etter hvert 20°C .
- $f(x) = -18,09 \cdot 0,98^x$ (eksponential) **flater ut og nærmer seg 0 ovenfra/nedenfra**; den har den vannrette asymptoten $y = 0$ og blir aldri positiv.

f beskriver derfor den fysiske realistiske utflatingen, mens T_1 vokser for fort i det lange løp.

e) Malene løfter f opp 20°C , så modellen blir

$$T_2(x) = f(x) + 20 = -18,09 \cdot 0,98^x + 20.$$

Kontroll: $T_2(0) = -18,09 + 20 = 1,91 \approx 2$, slik Malene ønsket. Den vannrette asymptoten er nå $y = 20$, så modellen nærmer seg termostatverdien — fysisk rimelig.

Etter 4 timer er $x = 4 \cdot 60 = 240$ minutter:

$$T_2(240) = -18,09 \cdot 0,98^{240} + 20 \approx -18,09 \cdot 0,0079 + 20 \approx 19,9^\circ\text{C}.$$

$$T_2(240) \approx 19,9^\circ\text{C}$$

Temperaturen er da praktisk talt lik termostatverdien 20°C .

Oppgave 5

Oppgave. Grafen til en andregradsfunksjon f har en tangent i $(1, f(1))$ med stigningstall 0 og en tangent i $(4, f(4))$ med stigningstall 6. a) Bestem $f'(x)$. b) Grafen skjærer y -aksen i $(0, 4)$ — bestem $f(x)$.

a) Den deriverte i et punkt er lik stigningstallet til tangenten der. For en andregradsfunksjon er $f'(x)$ lineær, $f'(x) = kx + m$. Opplysningene gir

$$f'(1) = 0 : \quad k + m = 0, \quad f'(4) = 6 : \quad 4k + m = 6.$$

Trekker vi den første likningen fra den andre: $3k = 6 \Rightarrow k = 2$, og da $m = -k = -2$.

$$f'(x) = 2x - 2$$

b) Vi integrerer (eller bruker at f er en andregradsfunksjon med $f'(x) = 2x - 2$):

$$f(x) = x^2 - 2x + C.$$

Grafen skjærer y -aksen i $(0, 4)$, så $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$.

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

Kontroll: $f'(x) = 2x - 2$, $f'(1) = 0$, $f'(4) = 6$, $f(0) = 4$. ✓

Oppgave 6

Oppgave. $f(x) = x^3 - 2bx^2 + (b^2 + 3)x$, der $b \in \mathbb{R}$. a) Vis at f bare har ett nullpunkt uavhengig av b . b) Løs $f'(x) = 0$, og avgjør for hvilke b grafen har bare ett stasjonært punkt. c) Dersom $b \neq 0$ har grafen to tangenter med stigningstall 3 — bestem likningene for disse tangentene.

a) Vi faktoriserer ut x :

$$f(x) = x(x^2 - 2bx + (b^2 + 3)).$$

Det ene nullpunktet er $x = 0$. Andregradsfaktoren $x^2 - 2bx + (b^2 + 3)$ har diskriminant

$$D = (-2b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 + 3) = 4b^2 - 4b^2 - 12 = -12 < 0.$$

Diskriminanten er negativ for **alle** b , så andregradsfaktoren har ingen reelle nullpunkter. Dermed har f bare nullpunktet $x = 0$ uansett verdi av b .

$$x = 0 \text{ er eneste nullpunkt, uavhengig av } b$$

b) Vi deriverer:

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + (b^2 + 3).$$

$$f'(x) = 0 \implies x = \frac{4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (b^2 + 3)}}{2 \cdot 3} = \frac{4b \pm \sqrt{4b^2 - 36}}{6} = \frac{2b \pm \sqrt{b^2 - 9}}{3}.$$

Antall stasjonære punkter avhenger av diskriminanten $4b^2 - 36$:

- $b^2 - 9 < 0$ (dvs. $-3 < b < 3$): ingen reelle løsninger — ingen stasjonære punkter.
- $b^2 - 9 = 0$ (dvs. $b = \pm 3$): **én** løsning — bare ett stasjonært punkt.
- $b^2 - 9 > 0$ (dvs. $b < -3$ eller $b > 3$): to stasjonære punkter.

Grafen har altså bare ett stasjonært punkt når

$$b = -3 \text{ eller } b = 3$$

(Da blir $f'(x) = 0$ med $x = \frac{2b}{3}$, altså $x = \mp 2$.)

c) Tangenter med stigningstall 3 finnes der $f'(x) = 3$:

$$3x^2 - 4bx + (b^2 + 3) = 3 \implies 3x^2 - 4bx + b^2 = 0.$$

Faktorisering: $3x^2 - 4bx + b^2 = (x - b)(3x - b) = 0$, så $x = b$ eller $x = \frac{b}{3}$.

Tangent 1, ved $x = b$: $f(b) = b^3 - 2b \cdot b^2 + (b^2 + 3)b = b^3 - 2b^3 + b^3 + 3b = 3b$. Tangenten gjennom $(b, 3b)$ med stigningstall 3:

$$y = 3(x - b) + 3b = 3x.$$

Tangent 2, ved $x = \frac{b}{3}$:

$$f\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{b^3}{27} - 2b \cdot \frac{b^2}{9} + (b^2 + 3) \cdot \frac{b}{3} = \frac{b^3}{27} - \frac{2b^3}{9} + \frac{b^3}{3} + b = \frac{4b^3}{27} + b.$$

Tangenten gjennom $\left(\frac{b}{3}, \frac{4b^3}{27} + b\right)$ med stigningstall 3:

$$y = 3\left(x - \frac{b}{3}\right) + \frac{4b^3}{27} + b = 3x - b + \frac{4b^3}{27} + b = 3x + \frac{4b^3}{27}.$$

$y = 3x$ og $y = 3x + \frac{4b^3}{27}$
--

For $b \neq 0$ er $\frac{4b^3}{27} \neq 0$, så dette er to forskjellige (parallele) tangenter, slik oppgaven sier.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.