

# Matematikk 1T — Vår 2023

## Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

**Om dette løsningsforslaget.** Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

### DEL 1 — Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1 (2 poeng)

**Oppgave.** En rettvinklet trekant har sidelengder 8, 6 og 10 (hypotenus 10). Vinkelen  $u$  ligger ved kateten 6. Vis at  $(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = 1$ .

**Løsning.** Vinkelen  $u$  har hosliggende katet 6, motstående katet 8 og hypotenus 10. Da er

$$\sin u = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenus}} = \frac{8}{10}, \quad \cos u = \frac{\text{hosliggende}}{\text{hypotenus}} = \frac{6}{10}.$$

Setter vi inn, får vi

$$(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100} = \frac{100}{100} = \boxed{1}.$$

(At dette alltid blir 1, følger av Pytagoras:  $8^2 + 6^2 = 100 = 10^2$ .)

#### Oppgave 2 (2 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ . I hvilke punkter skjærer grafen  $x$ -aksen?

**Løsning.** Grafen skjærer  $x$ -aksen der  $f(x) = 0$ . Vi faktorerer (to tall med produkt  $-8$  og sum  $-2$  er  $-4$  og  $2$ ):

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) = 0 \implies x = 4 \text{ eller } x = -2.$$

Grafen skjærer altså  $x$ -aksen i punktene

$$\boxed{(-2, 0) \text{ og } (4, 0)}.$$

### Oppgave 3 (3 poeng)

**Oppgave.** Bestem  $a$  og  $b$  slik at  $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x + a)(x - b)$  blir en identitet.

**Løsning.** Et tredjegradspolynom  $= (x - 1)(x + a)(x - b)$  betyr at  $x = 1$  er et nullpunkt. Kontroll:

$$1 - 5 - 8 + 12 = 0. \checkmark$$

Dermed er  $(x - 1)$  en faktor. Polynomdivisjon (eller å gjette de andre heltallsnullpunktene) gir

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x^2 - 4x - 12) = (x - 1)(x - 6)(x + 2).$$

Sammenligner vi med  $(x - 1)(x + a)(x - b)$ , ser vi at  $x + a = x + 2$  og  $x - b = x - 6$ , altså

$$\boxed{a = 2, \quad b = 6}.$$

### Oppgave 4 (2 poeng — teller dobbelt)

**Oppgave.** Grafen til en rasjonal funksjon  $f$  er gitt (se figur). Bestem  $f(x)$  og argumenter for at svaret er riktig.

**Løsning.** Vi leser av to opplysninger fra figuren:

- **Vertikal asymptote**  $x = 1$  (grafene går mot  $\pm\infty$  nær  $x = 1$ ). Det betyr at nevneren er null for  $x = 1$ , altså at nevneren inneholder faktoren  $(x - 1)$ .
- **Horisontal asymptote**  $y = 3$ . For en brøk der teller og nevner har samme grad, er den horisontale asymptoten forholdet mellom de ledende koeffisientene. Vi velger derfor  $\frac{3x+k}{x-1}$ .

Konstanten  $k$  bestemmer vi av at grafen skjærer  $y$ -aksen i  $(0, 6)$ :

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0 + k}{0 - 1} = -k = 6 \implies k = -6.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3x - 6}{x - 1}}$$

**Argument.** Tre kontroller mot grafen:

1. *Vertikal asymptote:* nevneren  $x - 1 = 0$  for  $x = 1$ .  $\checkmark$
2. *Horisontal asymptote:* for store  $|x|$  er  $f(x) = \frac{3x - 6}{x - 1} \rightarrow \frac{3x}{x} = 3$ , så  $y = 3$ .  $\checkmark$
3. *Punkter:*  $f(0) = \frac{-6}{-1} = 6$  og  $f(2) = \frac{0}{1} = 0$  (grafene skjærer  $x$ -aksen i  $x = 2$ , som passer med figuren).  $\checkmark$

### Oppgave 5 (4 poeng — teller dobbelt)

**Oppgave.** Figuren viser grafen til den **deriverte**  $f'$ .  $f'$  har nullpunkter i  $x = -3, 12$ ,  $x = 1$  og  $x = 5, 12$ . Nullpunktene til  $f$  selv er  $x = -4$ ,  $x = -2$ ,  $x = 4$  og  $x = 6$ . Lag en skisse av hvordan grafen til  $f$  kan se ut, og argumenter.

**Løsning** — **fortegnsskjema for  $f'$** . Fra grafen til  $f'$  leser vi av fortegnet (krysser  $x$ -aksen i  $-3,12$ ,  $1$  og  $5,12$ ):

Intervall	$x < -3,12$	$-3,12 < x < 1$	$1 < x < 5,12$	$x > 5,12$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f$	synker	vokser	synker	vokser

Dermed har  $f$  disse ekstremalpunktene (der  $f'$  skifter fortegn):

- $x = -3,12$ :  $f'$  går fra – til +  $\Rightarrow$  **bunnpunkt**
- $x = 1$ :  $f'$  går fra + til –  $\Rightarrow$  **toppunkt**
- $x = 5,12$ :  $f'$  går fra – til +  $\Rightarrow$  **bunnpunkt**

**Plassering i forhold til  $x$ -aksen.**  $f$  er en fjerdegradsfunksjon (fordi  $f'$  er av tredje grad) med fire nullpunkter  $-4, -2, 4, 6$ , og siden  $f'(x) > 0$  for store  $x$ , vokser  $f$  mot  $+\infty$  — grafen «åpner oppover» i begge ender. Fortegnet til  $f$  blir da:

$$f > 0 \text{ for } x < -4, \quad f < 0 \text{ på } (-4, -2), \quad f > 0 \text{ på } (-2, 4), \quad f < 0 \text{ på } (4, 6), \quad f > 0 \text{ for } x > 6.$$

**Skisse (beskrivelse).** Grafen til  $f$ :

- kommer ned fra  $+\infty$  til venstre, krysser  $x$ -aksen i  $x = -4$ ,
- har et **bunnpunkt** ved  $x \approx -3,12$  (under  $x$ -aksen),
- stiger og krysser  $x$ -aksen i  $x = -2$ ,
- har et **toppunkt** ved  $x = 1$  (over  $x$ -aksen),
- synker og krysser  $x$ -aksen i  $x = 4$ ,
- har et **bunnpunkt** ved  $x \approx 5,12$  (under  $x$ -aksen),
- krysser  $x$ -aksen i  $x = 6$  og stiger mot  $+\infty$ .

Bunnpunkt ved  $x \approx -3,12$ , toppunkt ved  $x = 1$ , bunnpunkt ved  $x \approx 5,12$ ; nullpunkter  $-4, -2, 4, 6$ .

Skissen er riktig fordi ekstremalpunktene ligger nøyaktig der  $f'$  er null og skifter fortegn, og nullpunktene til  $f$  ligger der grafen krysser  $x$ -aksen.

## DEL 2 — Med hjelpemidler

I Del 2 er digitale hjelpemidler (CAS, graftegner, regneark og programmering) tillatt. Utregningene nedenfor er kontrollert med CAS/graftegner.

### Oppgave 1 (Svalbard-temperatur)

**Oppgave.**  $T(x) = 0,048x^4 - 1,4x^3 + 13,36x^2 - 45,8x + 35,2$  for  $x \in [2, 10]$ , der  $x = 2$  er 1. februar,  $x = 3$  er 1. mars osv. ( $T$  i  $^{\circ}\text{C}$ ). a) Omtrent hvor mange døgn i perioden 1. feb.–1. okt. er  $T > 0$ ? b) Stigningstall til linja gjennom  $(3, T(3))$  og  $(7, T(7))$  — med praktisk tolkning. c) Bestem nullpunkter og ekstremalpunkter til  $T'$ , og tolk koordinatene.

a) Vi finner hvor  $T(x) = 0$  i intervallet  $[2, 10]$ . Med CAS får vi to nullpunkter:

$$x_1 \approx 5,77 \quad \text{og} \quad x_2 \approx 8,91.$$

Mellom disse er  $T > 0$  (sjekk:  $T(7) = 4,29 > 0$ ). Lengden er  $x_2 - x_1 \approx 3,13$  måneder. Hver måned varer ca. 30,4 døgn, så

$$\Delta \approx 3,13 \cdot 30,4 \approx \boxed{95 \text{ døgn}}.$$

b) Stigningstallet til den rette linja gjennom to punkter er

$$a = \frac{T(7) - T(3)}{7 - 3} = \frac{4,288 - (-15,872)}{4} = \frac{20,16}{4} = \boxed{5,04}.$$

*Praktisk tolkning:* I gjennomsnitt steg temperaturen med ca. 5,0 °C per måned i perioden fra 1. mars ( $x = 3$ ) til 1. juli ( $x = 7$ ).

c) Vi deriverer:

$$T'(x) = 0,192x^3 - 4,2x^2 + 26,72x - 45,8.$$

**Nullpunkter til  $T'$**  (her er  $T$  stasjonær — ekstremalpunkter til  $T$ ). I  $[2, 10]$  gir CAS

$$x \approx 2,76 \rightarrow (2,76, 0) \quad \text{og} \quad x \approx 7,33 \rightarrow (7,33, 0).$$

- $x \approx 2,76$ : her er  $T$  på sitt laveste,  $T(2,76) \approx -16,1$  °C — **kaldest** (slutten av februar, måned nr. 2). Temperaturen slutter å synke og begynner å stige.
- $x \approx 7,33$ : her er  $T$  på sitt høyeste,  $T(7,33) \approx 4,5$  °C — **varmest** (rundt 10. juli). Temperaturen slutter å stige og begynner å synke.

**Ekstremalpunkter til  $T'$**  (der  $T''(x) = 0$  — vendepunkter til  $T$ , der temperaturen endrer seg raskest):

$$x \approx 4,69 \rightarrow (4,69, 6,94) \quad (\text{toppunkt på } T'),$$

$$x \approx 9,90 \rightarrow (9,90, -6,62) \quad (\text{bunnpunkt på } T').$$

- $(4,69, 6,94)$ :  $T'$  er størst her — temperaturen **stiger raskest**, ca. 6,9 °C per måned (slutten av april, måned nr. 4).
- $(9,90, -6,62)$ :  $T'$  er minst her — temperaturen **synker raskest**, ca. 6,6 °C per måned (slutten av september).

## Oppgave 2 (Gjerde ved elva)

**Oppgave.** Speidere har 80 m tau og fire pinner til å gjerde et rektangulært område ved en elv. Det settes **ikke** gjerde langs elva (én lengdeside). a) Areal hvis lengden er 60 m. b) Lag en systematisk oversikt (tabell) og argumenter for Hermans påstand: arealet blir størst når lengden er dobbelt så lang som bredden. c) Sett opp et funksjonsuttrykk, tegn grafen og vis at Herman har rett.

**Oppsett.** La lengden være  $L$  og bredden  $B$ . Siden den ene lengdesiden (langs elva) ikke gjerdes, brukes tauet til én lengde og to bredder:

$$L + 2B = 80 \implies L = 80 - 2B.$$

a) Med  $L = 60$ :

$$60 = 80 - 2B \implies B = 10. \quad A = L \cdot B = 60 \cdot 10 = \boxed{600 \text{ m}^2}.$$

b) Vi setter opp en tabell der  $L = 80 - 2B$  og  $A = L \cdot B$ :

Bredde $B$ (m)	Lengde $L = 80 - 2B$ (m)	Areal $A = L \cdot B$ (m <sup>2</sup> )
5	70	350
10	60	600
15	50	750
<b>20</b>	<b>40</b>	<b>800</b>
25	30	750
30	20	600
35	10	350

Det største arealet, 800 m<sup>2</sup>, får vi for  $B = 20$  og  $L = 40$ . Da er  $L = 2B$  — altså er lengden dobbelt så lang som bredden, akkurat som Herman påstår. ✓

c) Josefines funksjonsuttrykk: skriv arealet som funksjon av bredden  $B$ :

$$A(B) = (80 - 2B) \cdot B = -2B^2 + 80B.$$

Dette er en andregradsfunksjon (parabel som vender ned). Toppunktet ligger midt mellom nullpunktene  $B = 0$  og  $B = 40$ :

$$B = \frac{0 + 40}{2} = 20 \implies L = 80 - 2 \cdot 20 = 40, \quad A(20) = -2 \cdot 20^2 + 80 \cdot 20 = 800.$$

Grafen til  $A(B) = -2B^2 + 80B$  er en parabel med toppunkt  $(20, 800)$ . Største areal er 800 m<sup>2</sup> ved  $B = 20$ ,  $L = 40$ , dvs.  $L = 2B$ . Herman har dermed rett.

$$\boxed{A(B) = -2B^2 + 80B, \quad A_{\max} = 800 \text{ m}^2 \text{ ved } L = 40, B = 20 (L = 2B)}$$

### Oppgave 3 (Areal av firkant — teller dobbelt)

**Oppgave.** Firkant  $ABCD$  med sider  $AB = 10$ ,  $BC = 5$ ,  $CD = 9$ ,  $DA = 6$  og vinkel  $B = \angle ABC = 75^\circ$ . Vis at arealet kan bestemmes med trigonometri, og bestem arealet.

**Løsning.** Vi trekker diagonalen  $AC$ . Den deler firkanten i to trekanter:  $\triangle ABC$  og  $\triangle ACD$ .

**Trekant  $ABC$**  ( $AB = 10$ ,  $BC = 5$ , mellomliggende vinkel  $B = 75^\circ$ ). Arealsetningen gir

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 75^\circ \approx 24,15.$$

Diagonalen  $AC$  finner vi med **cosinussetningen**:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 100 + 25 - 100 \cos 75^\circ \approx 99,12,$$

så  $AC \approx 9,96$ .

**Trekant**  $ACD$  ( $CD = 9$ ,  $DA = 6$ ,  $AC \approx 9,96$ ). Nå kjenner vi alle tre sidene. Vi finner én vinkel med cosinussetningen og bruker så arealsetningen — eller bruker Herons formel direkte. Med  $s = \frac{9,96+9+6}{2} \approx 12,48$ :

$$A_{ACD} = \sqrt{s(s-AC)(s-CD)(s-DA)} \approx \sqrt{12,48 \cdot 2,52 \cdot 3,48 \cdot 6,48} \approx 26,63.$$

**Samlet areal:**

$$A = A_{ABC} + A_{ACD} \approx 24,15 + 26,63 \approx \boxed{50,8}.$$

*Trigonometriske sammenhenger brukt: arealsetningen  $A = \frac{1}{2}ab \sin C$  og cosinussetningen  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  (og Herons formel for den siste trekanten).*

#### Oppgave 4 (Tilnærmet areal — Riemann)

**Oppgave.**  $f(x) = \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2$ . Thea tilnærmer arealet mellom  $y$ -aksen,  $x$ -aksen og grafen ( $x \in [0, 6]$ ) med rektangler. a) Areal av de seks rektanglene i figur 2. b) Lag et program (b teller dobbelt). c) Bruk programmet med 6000 rektangler.

a) Seks rektangler på  $[0, 6]$  har bredde  $\frac{6-0}{6} = 1$ . I figur 2 leser vi av at høyden til hvert rektangel er funksjonsverdien i **venstre** kant av intervallet ( $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ):

$x$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	$\frac{50}{9}$	$\frac{48}{9}$	4	$\frac{20}{9}$	$\frac{6}{9}$

$$A_6 = 1 \cdot \left(4 + \frac{50}{9} + \frac{48}{9} + 4 + \frac{20}{9} + \frac{6}{9}\right) = \frac{196}{9} \approx \boxed{21,8}.$$

b) Vi fullfører programmet. Bredden er  $\frac{x_{\max}-x_{\min}}{n}$ , og vi summerer  $f$  i venstre kant av hvert rektangel (samme metode som i a).

**Program (Python):**

```
def f(x):
    return 1/9 * (x + 1) * (x - 6) ** 2 # Definerer funksjonen f

x_min = 0 # Minste x-verdi
x_maks = 6 # Største x-verdi
```

```

n = 6000          # Antall rektangler
bredde = (x_maks - x_min) / n          # Bredden av hvert rektangel

areal = 0
for i in range(n):
    x = x_min + i * bredde          # venstre kant av rektangel nr. i
    areal += f(x) * bredde
print(round(areal, 4))          # 20.002

```

Program (C++):

```

#include <iostream>
#include <cmath>
double f(double x) {          // Definerer funksjonen f
    return 1.0/9.0 * (x + 1) * std::pow(x - 6, 2);
}
int main() {
    double x_min = 0, x_maks = 6;
    int n = 6000;          // Antall rektangler
    double bredde = (x_maks - x_min) / n; // Bredden av hvert rektangel
    double areal = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        double x = x_min + i * bredde; // venstre kant av rektangel nr. i
        areal += f(x) * bredde;
    }
    std::cout << areal << "\n"; // 20.002
    return 0;
}

```

c) Programmet med  $n = 6000$  rektangler gir

$$A_{6000} \approx \boxed{20,0}.$$

(Til sammenligning: det eksakte arealet er  $\int_0^6 \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2 dx = 20$ . Jo flere rektangler, jo bedre tilnærming.)

### Oppgave 5 (Sirkel og trekant — teller dobbelt)

**Oppgave.**  $A, B, C$  ligger på en sirkel med sentrum  $S$  og radius  $r$ .  $\angle SBA = 30^\circ$ ,  $\angle BSC = 90^\circ$ , og arealet av  $\triangle ABC$  er  $2\sqrt{3} + 6$ . Bestem en eksakt verdi for  $r$ .

**Løsning.** Sentrum  $S$  ligger inni trekanten, så  $\triangle ABC$  deles i tre trekanter  $\triangle SAB$ ,  $\triangle SBC$  og  $\triangle SCA$ , alle med to sider lik radien  $r$ .

**Sentralvinklene:**

- I  $\triangle SAB$  er  $SA = SB = r$  (likebeint), og basisvinkelen  $\angle SBA = 30^\circ$ , så  $\angle SAB = 30^\circ$  og dermed  $\angle ASB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ .
- $\angle BSC = 90^\circ$  (gitt).
- Sentralvinklene rundt  $S$  summeres til  $360^\circ$ , så  $\angle CSA = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ .

**Areal med arealsetningen** (hver deltrekant har sidene  $r$  og  $r$ ):

$$\begin{aligned} A_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}r^2 \sin 120^\circ + \frac{1}{2}r^2 \sin 90^\circ + \frac{1}{2}r^2 \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 3}{2} = \frac{r^2(\sqrt{3} + 3)}{4}. \end{aligned}$$

Sett lik det oppgitte arealet  $2\sqrt{3} + 6 = 2(\sqrt{3} + 3)$ :

$$\frac{r^2(\sqrt{3} + 3)}{4} = 2(\sqrt{3} + 3) \implies r^2 = 8 \implies r = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

### Oppgave 6 (Tredjegradsfunksjon og Tryms «regel»)

**Oppgave.**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ . a) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter. b) Utforsk og kommenter Tryms «regel»: at en tredjegradsfunksjon uten førstegradsledd alltid har et topp-/bunnpunkt på  $y$ -aksen (b teller dobbelt).

a) Vi deriverer og setter  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

Fortegnsskjema for  $f' = 3x(x - 2)$ : positiv for  $x < 0$ , negativ på  $(0, 2)$ , positiv for  $x > 2$ . Altså:

- $x = 0$ :  $f'$  skifter fra  $+$  til  $- \implies$  **toppunkt**.  $f(0) = 2$ .
- $x = 2$ :  $f'$  skifter fra  $-$  til  $+$   $\implies$  **bunnpunkt**.  $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ .

$$\boxed{\text{Toppunkt } (0, 2), \quad \text{Bunnpunkt } (2, -2)}$$

b) **Utforskning av Tryms «regel».** Trym hevder: når en tredjegradsfunksjon mangler førstegradsledd, ligger et topp-/bunnpunkt på  $y$ -aksen. Vi tester en generell tredjegradsfunksjon uten førstegradsledd:

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + d \quad (a \neq 0) \implies g'(x) = 3ax^2 + 2bx = x(3ax + 2b).$$

Nullpunkter:  $x = 0$  og  $x = -\frac{2b}{3a}$ . Vi ser at  $x = 0$  **alltid** er et stasjonært punkt (deriverte lik null). Punktet ligger på  $y$ -aksen,  $(0, d)$ .

**Men er  $x = 0$  alltid et topp-/bunnpunkt?** Nei.  $f'$  skifter fortegn i  $x = 0$  bare når de to nullpunktene er forskjellige, dvs. når  $-\frac{2b}{3a} \neq 0$ , altså når  $b \neq 0$ .

- Hvis  $b \neq 0$ :  $g'$  har to ulike nullpunkter, skifter fortegn i  $x = 0$ , og  $(0, d)$  er et topp-/bunnpunkt. Tryms regel stemmer.
- Hvis  $b = 0$  (f.eks.  $g(x) = x^3$ , som Eira nevner): da er  $g'(x) = 3ax^2$ , som har et **dobbelt** nullpunkt i  $x = 0$  og er positiv på begge sider.  $f'$  skifter ikke fortegn, så  $x = 0$  blir et **terrassepunkt (vendepunkt)**, ikke et topp-/bunnpunkt.

**Konklusjon.** Tryms regel har «litt rett»: en tredjegradsfunksjon uten førstegradsledd har alltid et stasjonært punkt på  $y$ -aksen. Men det er bare et ekte topp-/bunnpunkt dersom andregradsleddet også er til stede ( $b \neq 0$ ). Mangler både førstegrads- og andregradsleddet (som i  $x^3$ ), er punktet et terrassepunkt. Eira har altså rett i at «det er noe mer vi må se etter».

---

*Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: [matematikk.net](http://matematikk.net). Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.*