

Matematikk 1T — Vår 2024

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. En rettvinklet trekant har kateter 8 og 6 og hypotenus 10. Den spisse vinkelen u ligger øverst (motstående katet 6), og v ligger nederst til høyre (motstående katet 8). Tom påstår at $\tan u \cdot \tan v = 1$. a) Vis at Tom har rett. b) Avgjør om påstanden gjelder for *alle* rettvinklede trekanter med to spisse vinkler u og v .

a) I trekanten er

$$\tan u = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}} = \frac{6}{8}, \quad \tan v = \frac{8}{6}.$$

Da blir

$$\tan u \cdot \tan v = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{6} = 1. \quad \boxed{\tan u \cdot \tan v = 1}$$

b) Ja, dette gjelder generelt. Kall katetene a og b . Da er $\tan u = \frac{a}{b}$ og $\tan v = \frac{b}{a}$ (de bytter teller og nevner fordi det som er motstående katet for den ene vinkelen, er hosliggende for den andre). Dermed

$$\tan u \cdot \tan v = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Alternativt: i en rettvinklet trekant er $u + v = 90^\circ$, så $v = 90^\circ - u$ og $\tan v = \cot u = \frac{1}{\tan u}$. Da blir produktet alltid 1.

$\boxed{\text{Påstanden gjelder for alle rettvinklede trekanter.}}$

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Guri har utført to ulike polynomdivisjoner og påstår at begge viser at faktoriseringen $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = (2x^2 + 7x + 3)(x - 2)$ er riktig. Hvilke to polynomdivisjoner kan hun ha utført? Utfør dem, og forklar at hver av dem viser at faktoriseringen stemmer.

Løsning. En faktorisering $P = Q \cdot R$ kan kontrolleres på to måter: enten dele P på Q (skal gi R uten rest), eller dele P på R (skal gi Q uten rest).

Divisjon 1: $(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 : (x - 2) = 2x^2 + 7x + 3 \\
 \underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\
 7x^2 - 11x - 6 \\
 \underline{-(7x^2 - 14x)} \\
 3x - 6 \\
 \underline{-(3x - 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Resten er 0, og kvotienten er $2x^2 + 7x + 3$. Det viser at $(x - 2)$ er en faktor og at den andre faktoren er nettopp $2x^2 + 7x + 3$.

Divisjon 2: $(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6) : (2x^2 + 7x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 : (2x^2 + 7x + 3) = x - 2 \\
 \underline{-(2x^3 + 7x^2 + 3x)} \\
 -4x^2 - 14x - 6 \\
 \underline{-(-4x^2 - 14x - 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Også her er resten 0, og kvotienten er $x - 2$.

Begge divisjonene går opp uten rest, så

$$\boxed{2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = (2x^2 + 7x + 3)(x - 2).}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Oppgave. Figuren viser et $a \times a$ -kvadrat der et lite $b \times b$ -kvadrat i nederste høyre hjørne er fjernet (hvitt). Sett opp en matematisk identitet med utgangspunkt i arealet av det grønne (gjenværende) området.

Løsning. Det grønne arealet er hele kvadratet minus det lille hvite kvadratet:

$$A_{\text{grønn}} = a^2 - b^2.$$

Samme areal kan regnes ut fra figurens to grønne deler (slik målene er satt opp):

- venstre felt: bredde $(a - b)$ og høyde a , areal $a(a - b)$,
- øvre høyre felt: bredde b og høyde $(a - b)$, areal $b(a - b)$.

Til sammen

$$a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b).$$

Setter vi de to uttrykkene for samme areal lik hverandre, får vi konjugatsetningen:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

Oppgave. Ada har laget programmet under (Python). Med $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $a = 0$, $b = 5$, regnes $v = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ut og skrives ut. Hvilken verdi blir skrevet ut, og hva forteller denne verdien?

Løsning. Vi regner ut funksjonsverdiene:

$$f(0) = 0 - 0 + 7 = 7, \quad f(5) = 25 - 15 + 7 = 17.$$

Da blir

$$v = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{17 - 7}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Programmet skriver ut $v = 2$. Uttrykket $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ er stigningstallet til den rette linjen (sekanten) mellom punktene $(0, f(0))$ og $(5, f(5))$. Verdien forteller altså **den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 0$ til $x = 5$** : i gjennomsnitt vokser f med 2 enheter per enhet x på dette intervallet.

For elever som bruker C++, gir denne koden samme svar:

```
#include <iostream>
double f(double x) { return x*x - 3*x + 7; }
int main() {
    double a = 0, b = 5;
    double v = (f(b) - f(a)) / (b - a);
    std::cout << v << "\n";    // 2
    return 0;
}
```

Oppgave 5 (4 poeng)

Oppgave. Figuren viser grafen til en funksjon f . Grafen er en parabel med nullpunkter $(-3, 0)$ og $(4, 0)$ og skjæring med y -aksen i $(0, 24)$. a) Bestem $f(x)$. b) Løs ulikheten $f(x) > 12$.

a) Nullpunktene $x = -3$ og $x = 4$ gir faktorisert form

$$f(x) = a(x + 3)(x - 4).$$

Grafen går gjennom $(0, 24)$, så

$$24 = a(0 + 3)(0 - 4) = -12a \implies a = -2.$$

Dermed

$$f(x) = -2(x + 3)(x - 4) = \boxed{-2x^2 + 2x + 24}.$$

(Parabelen åpner nedover, i samsvar med figuren.)

b) Vi løser $f(x) > 12$:

$$-2x^2 + 2x + 24 > 12 \implies -2x^2 + 2x + 12 > 0 \implies x^2 - x - 6 < 0.$$

Faktoriserer: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, med nullpunkter $x = -2$ og $x = 3$. Siden $x^2 - x - 6$ er en parabel som åpner oppover, er den negativ mellom nullpunktene:

$$\boxed{-2 < x < 3}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

Oppgave. En tabell viser solgte bagetter (100, 130, 160, 175, 190, 220, 235) og tilhørende ukentlig overskudd i kroner (1450, 2300, 3050, 3365, 3720, 4140, 4175). a) Vis at $O(x) = -0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$ er en god modell for overskuddet når x bagetter selges. b) Hvor mange bagetter gir størst overskudd, og hvor stort blir det? c) Stigningstall til linjen gjennom $(100, O(100))$ og $(200, O(200))$, med praktisk tolkning. d) Momentan vekstfart ved $x = 235$, med praktisk tolkning.

a) Gjør en **kvadratisk regresjon** (CAS/regneark) på tallparene. Regresjonen gir

$$O(x) \approx -0,0903x^2 + 51,037x - 2776,98,$$

som er praktisk talt identisk med den oppgitte modellen $-0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$. At minste kvadraters tilpasning reproduserer nettopp disse koeffisientene, er det sterkeste argumentet for at modellen passer.

Som kontroll setter vi inn noen verdier:

x	100	160	220	235
Tabell	1450	3050	4140	4175
$O(x)$	1427	3085	4096	4247

Modellverdiene ligger nær de observerte tallene, så O er en god modell.

b) O er en andregradsfunksjon som åpner nedover, så maksimum ligger i toppunktet. Vi deriverer og setter lik null:

$$O'(x) = -0,18x + 51,04 = 0 \implies x = \frac{51,04}{0,18} \approx 283,6.$$

Antall bagetter må være et helt tall, så $x \approx 284$. Da blir

$$O(284) \approx 4459 \text{ kr.}$$

Ca. 284 bagetter gir størst overskudd, ca. 4459 kr.

c) Stigningstallet til linjen gjennom $(100, O(100))$ og $(200, O(200))$:

$$O(100) = 1427, \quad O(200) = -0,09 \cdot 40000 + 51,04 \cdot 200 - 2776,98 = 3831.$$

$$a = \frac{O(200) - O(100)}{200 - 100} = \frac{3831 - 1427}{100} = \boxed{24,04 \text{ kr/bagett.}}$$

Tolkning: Når salget øker fra 100 til 200 bagetter, øker overskuddet i gjennomsnitt med ca. 24 kroner per ekstra bagett.

Merk (fasit): Vi bruker den oppgitte modellen $O(x) = -0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$ og får 24,04. Den offisielle fasiten bruker den uavrundede regresjonsmodellen direkte (GeoGebra) og får $\approx 23,96$. Begge er riktige; forskjellen skyldes kun avrunding av regresjonskoeffisientene.

d) Momentan vekstfart er den deriverte:

$$O'(235) = -0,18 \cdot 235 + 51,04 = -42,3 + 51,04 = \boxed{8,74 \text{ kr/bagett.}}$$

Tolkning: Ved et salg på 235 bagetter øker overskuddet med ca. 8,74 kroner for hver ekstra bagett som selges. Veksten er fortsatt positiv, men avtakende (vi nærmer oss toppunktet ved $x \approx 284$).

Merk (fasit): Med den oppgitte modellen $O(x) = -0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$ blir $O'(235) = 8,74$. Den offisielle fasiten regner med den uavrundede regresjonsmodellen og får $\approx 8,61$. Begge svar er korrekte; avviket skyldes avrunding av modellkoeffisientene.

Oppgave 2 (3 poeng)

Oppgave. Når en lysstråle går fra luft til vann, gjelder $\sin u = 1,33 \cdot \sin v$, der u er innfallsvinkelen (i luft) og v brytningsvinkelen (i vann), begge målt fra normalen m . a) Hvor stor må u være for at $v = 39^\circ$? b) Hva skjer med v når $u \rightarrow 90^\circ$? c) Kan u og v bli like store?

a) Sett inn $v = 39^\circ$:

$$\sin u = 1,33 \cdot \sin 39^\circ \approx 1,33 \cdot 0,6293 \approx 0,8370.$$

$$u = \sin^{-1}(0,8370) \approx \boxed{56,8^\circ}.$$

b) Når $u \rightarrow 90^\circ$ er $\sin u \rightarrow 1$, så

$$\sin v = \frac{\sin u}{1,33} \rightarrow \frac{1}{1,33} \approx 0,7519 \implies v \rightarrow \sin^{-1}(0,7519) \approx 48,8^\circ.$$

$$\boxed{v \text{ nærmer seg ca. } 48,8^\circ \text{ (den største mulige brytningsvinkelen).}$$

Selv om lyset kommer inn nesten langs vannflata, brytes strålen aldri mer enn til ca. $48,8^\circ$ fra normalen.

c) Anta $u = v$. Da gir likningen

$$\sin u = 1,33 \cdot \sin u \implies \sin u (1 - 1,33) = 0 \implies \sin u = 0.$$

Eneste løsning er $u = v = 0^\circ$, altså at lyset går rett inn langs normalen og ikke brytes i det hele tatt. For alle reelle innfallsvinkler $u > 0^\circ$ er $v < u$.

$$\boxed{\text{Nei (bortsett fra det trivielle tilfellet } u = v = 0^\circ\text{).}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. En trekant ABC har $AB = 8$, $\angle A = 120^\circ$ og areal $4\sqrt{3}$. Bestem sidene AC og BC eksakt.

Løsning. Sidene AB og AC ligger inntil vinkel A . Arealformelen gir

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \implies 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin 120^\circ.$$

Med $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot AC \implies AC = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2.$$

$$AC = 2.$$

Den siste siden BC (motstående $\angle A$) finner vi med cosinussetningen. Med $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 64 + 4 - 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 68 + 16 = 84.$$

$$BC = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = \boxed{2\sqrt{21}}.$$

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. Med summene $S_1 = 1, S_2 = 1+3, S_3 = 1+3+5, \dots$ (summen av de n første oddetallene). a) Lag et program som summerer og skriver ut S_1, S_2, \dots, S_{20} . b) Beskriv sammenhengen du oppdager, og bruk kulefiguren til å argumentere for at den må være riktig.

a) Program (Python):

```
S = 0
for n in range(1, 21):
    S += 2 * n - 1      # n-te oddetall
    print(f"S{n} = {S}")
# Utskrift: S1 = 1, S2 = 4, S3 = 9, ... , S20 = 400
```

Program (C++):

```
#include <iostream>
int main() {
    int S = 0;
    for (int n = 1; n <= 20; ++n) {
        S += 2 * n - 1;          // n-te oddetall
        std::cout << "S" << n << " = " << S << "\n";
    }
    return 0;    // S1 = 1, S2 = 4, ... , S20 = 400
}
```

b) Utskriften er 1, 4, 9, 16, 25, \dots , 400 — altså kvadrattallene. Sammenhengen er

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Argument fra figuren: Kulene er ordnet i et kvadrat med n rader og n kolonner, altså n^2 kuler. Vi kan dele kvadratet inn i vinkelformede «L-skall»: det innerste hjørnet er 1 kule, neste L-skall legger til 3 kuler, så 5, så 7, og generelt har det k -te skallet $2k - 1$ kuler. Å bygge opp hele $n \times n$ -kvadratet skall for skall betyr nettopp å legge sammen oddetallene $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Siden hele figuren er et $n \times n$ -kvadrat, må summen være n^2 .

Oppgave 5 (8 poeng)

Oppgave. En tabell viser lufttrykk x (hPa) og kokepunktet K for vann ($^\circ\text{C}$): (1000, 100), (500, 81,4), (200, 60,1), (80, 41,5), (40, 29). a) Bestem en modell $K(x) = a \cdot x^b$. b) Ari modellerer lufttrykket x km over havet med ca. 12% nedgang per km; Lisa bruker at trykket halveres hver 5,5 km. Lag

begge modellene. c) Et egg blir ikke hardkokt om vanntemperaturen er lavere enn 85°C . Omtrent hvor høyt over havet kan man fortsatt få egg hardkokt?

a) Vi gjør en **potensregresjon** på tabellverdiene (CAS/regneark). Det gir (eksakte siffer varierer litt med verktøy)

$$K(x) \approx 7,56 \cdot x^{0,380}.$$

Modellen passer godt: f.eks. $K(1000) \approx 105$, $K(500) \approx 80$, $K(200) \approx 57$, $K(80) \approx 40$, $K(40) \approx 31$, som ligger nær de oppgitte verdiene.

b) La $P(x)$ være lufttrykket (hPa) i høyden x km, med utgangstrykk 1000 hPa ved havflata.

- **Ari:** 12% nedgang per km betyr at trykket multipliseres med 0,88 for hver km:

$$P_{\text{Ari}}(x) = 1000 \cdot 0,88^x.$$

- **Lisa:** Halvering hver 5,5 km betyr vekstfaktor 0,5 per 5,5 km, altså per km vekstfaktor $0,5^{1/5,5} \approx 0,881$:

$$P_{\text{Lisa}}(x) = 1000 \cdot 0,5^{x/5,5} \approx 1000 \cdot 0,881^x.$$

De to modellene gir nesten samme per-km-faktor (0,88 mot 0,881), så de er praktisk talt sammenfallende.

c) Egget blir hardkokt så lenge kokepunktet er minst 85°C . Vi finner først hvilket lufttrykk som svarer til $K(x) = 85$:

$$7,56 \cdot x^{0,380} = 85 \implies x = \left(\frac{85}{7,56}\right)^{1/0,380} \approx 578 \text{ hPa}.$$

Lufttrykket må altså være minst ca. 578 hPa. Vi finner høyden der trykket har sunket til 578 hPa (Ari-modellen):

$$1000 \cdot 0,88^x = 578 \implies x = \frac{\ln(0,578)}{\ln(0,88)} \approx 4,3 \text{ km}.$$

Lisas modell gir nesten samme svar (ca. 4,3 km).

Man kan få egg hardkokt opp til ca. 4,3 km over havet.

Over denne høyden er trykket — og dermed kokepunktet — for lavt til at vannet blir varmt nok ($\geq 85^{\circ}\text{C}$).

Oppgave 6 (2 poeng)

Oppgave. Den tegnede rette linjen i koordinatsystemet er grafen til den deriverte f' av en funksjon f . Punktet $P(1, 2)$ ligger på grafen til f . Bestem likningen for tangenten til grafen til f i punktet P . Husk å argumentere.

Løsning. Først leser vi av f' fra figuren. Den rette linjen går gjennom $(2, 0)$ og stiger; den passerer også $(4, 4)$. Stigningstallet er

$$\frac{4 - 0}{4 - 2} = 2,$$

og linjen skjærer x -aksen i $x = 2$, så

$$f'(x) = 2(x - 2) = 2x - 4.$$

Argument: Stigningstallet til tangenten til f i et punkt er nettopp den deriverte i punktets x -verdi. Tangenten i $P(1, 2)$ har derfor stigningstall

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

Vi leser av samme verdi direkte: linjen f' har y -verdi -2 ved $x = 1$. Tangenten gjennom $P(1, 2)$ med stigningstall -2 :

$$y - 2 = -2(x - 1) \implies y = -2x + 4.$$

$$\boxed{y = -2x + 4}$$

Kontroll: i $x = 1$ gir tangenten $y = -2 + 4 = 2$, som stemmer med P .

Oppgave 7 (6 poeng)

Oppgave. Tre grafer danner til sammen en lukket kurve (jf. figuren). Krav: (i) to av grafene har bunnpunkt som ligger på y -aksen; (ii) punktene A og B har samme y -koordinat. Velg tre ulike funksjoner og lag en tilsvarende figur. Forklar og argumenter for at løsningen er riktig.

Løsning. Vi bygger én lukket kurve av tre grafstykker som henger sammen ende-mot-ende. For at to av grafene skal ha bunnpunkt på y -aksen, bruker vi to parabler som åpner oppover med toppunkt (bunnpunkt) i $x = 0$, og ett linjestykke. Vi styrer definisjonsmengdene slik at endepunktene faller sammen.

Et valg som oppfyller alle kravene er:

$f_1(x) = x^2 - 4, \quad x \in [-2, 2]$	(blå, nedre bue)
$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, \quad x \in [-2, 0]$	(grønn, øvre venstre)
$f_3(x) = x - 2, \quad x \in [0, 2]$	(grå, øvre høyre — rett linje)

Vi sjekker endepunktene til hvert stykke:

Graf	Intervall	Venstre ende	Høyre ende	Bunnpunkt
f_1 (blå)	$[-2, 2]$	$(-2, 0)$	$(2, 0)$	$(0, -4)$
f_2 (grønn)	$[-2, 0]$	$(-2, 0)$	$(0, -2)$	$(0, -2)$
f_3 (grå)	$[0, 2]$	$(0, -2)$	$(2, 0)$	— (linje)

Argument for at kravene er oppfylt:

1. **To bunnpunkter på y -aksen.** f_1 er en parabel som åpner oppover med bunnpunkt $(0, -4)$, og f_2 er en parabel som åpner oppover med bunnpunkt $(0, -2)$. Begge bunnpunktene har $x = 0$, altså ligger de på y -aksen. ✓
2. **Lukket kurve.** Stykkene møtes i felles endepunkter og danner en sammenhengende løkke:

$$(-2, 0) \xrightarrow{f_2} (0, -2) \xrightarrow{f_3} (2, 0) \xrightarrow{f_1} (-2, 0).$$

Siden start- og slutt punktet er det samme $(-2, 0)$, og hver overgang skjer i et felles punkt, er kurven lukket. ✓

3. **A og B har samme y -koordinat.** Sett $A = (-2, 0)$ (det venstre hjørnet, der f_1 og f_2 møtes) og $B = (2, 0)$ (det høyre hjørnet, der f_1 og f_3 møtes). Begge har $y = 0$, så de ligger på samme vannrette linje. ✓

Merk: Oppgaven har svært mange riktige svar. Det avgjørende er at (i) to av grafene har bunnpunkt på y -aksen, (ii) to merkede punkter A og B har samme y -verdi, og (iii) grafstykkene møtes i felles endepunkter slik at kurven faktisk lukkes. Hvert funksjonsuttrykk må oppgis sammen med sitt definisjonsintervall.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.