Matematikk 1T — Vår 2025

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Oppgave. Funksjonen er gitt ved $f(x) = \dfrac{12x-3}{2x+1}$. Bestem likningene for eventuelle asymptoter til grafen.

Løsning. Dette er en rasjonal funksjon (forholdet mellom to førstegradsuttrykk).

Vertikal asymptote. Nevneren er null der

$$2x + 1 = 0 \implies x = -\tfrac{1}{2}.$$

Telleren er ikke null her ($12 \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 = -9 \neq 0$), så vi får en vertikal asymptote $x = -\frac{1}{2}$.

Horisontal asymptote. Teller og nevner har samme grad (begge grad 1). Da går grafen mot forholdet mellom de ledende koeffisientene når $|x|$ blir stor:

$$y = \frac{12}{2} = 6.$$

(Polynomdivisjon gir $\dfrac{12x-3}{2x+1} = 6 - \dfrac{9}{2x+1}$, og brøkleddet går mot 0.)

$$\boxed{x = -\tfrac{1}{2} \quad \text{og} \quad y = 6}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Løs ulikheten $x^2 - 4x - 12 < 0$.

Løsning. Vi finner nullpunktene til $x^2 - 4x - 12$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \implies x = -2 \text{ eller } x = 6.$$

Altså $x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$. Parabelen åpner oppover, så uttrykket er **negativt** mellom nullpunktene:

$$\boxed{-2 < x < 6}$$

Oppgave 3 (1 poeng)

Oppgave. En andregradsfunksjon f har *ett* nullpunkt, og grafen skjærer y-aksen i $(0, 9)$. Finn et mulig funksjonsuttrykk.

Løsning. At funksjonen har bare ett nullpunkt betyr at nullpunktet er dobbelt, så

$$f(x) = a(x - r)^2.$$

Grafen skjærer y-aksen i $(0, 9)$, så $f(0) = ar^2 = 9$. Et enkelt valg er $a = 1$ og $r = 3$ (da blir $1 \cdot 3^2 = 9$):

$$f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

Kontroll: dobbelt nullpunkt i $x = 3$, og $f(0) = 9$. ✓

$$\boxed{f(x) = (x-3)^2}$$

> *Merk:* Oppgaven har mange riktige svar, f.eks. også $f(x) = (x+3)^2$ eller $f(x) = (x-1)^2 \cdot 9$. Dette er ett eksempel.

Oppgave 4 (4 poeng)

Oppgave. a) Løs likningen $x^3 - 7x^2 - 10x + 16 = 0$. b) $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x + 16$. Hvilken av fire viste grafer (A–D) kan være grafen til f? Begrunn.

a) Vi prøver heltallsdelere av konstantleddet 16. Med $x = 1$:

$$1 - 7 - 10 + 16 = 0,$$

så $x = 1$ er en rot, og $(x-1)$ er en faktor. Polynomdivisjon:

$$x^3 - 7x^2 - 10x + 16 = (x-1)(x^2 - 6x - 16).$$

Den andre faktoren løses med abc-formelen:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} \implies x = 8 \text{ eller } x = -2.$$

$$\boxed{x \in \{-2,\ 1,\ 8\}}$$

b) Vi argumenterer ut fra flere egenskaper ved f:

- **Ledende ledd** x^3 har *positiv* koeffisient. Da går grafen *nedover* mot venstre ($x \to -\infty \Rightarrow f \to -\infty$) og *oppover* mot høyre ($x \to +\infty \Rightarrow f \to +\infty$). Dette utelukker graf **B** og **D** (som «snur feil vei», altså negativt ledende ledd).
- **Konstantledd:** $f(0) = 16 > 0$, så grafen skjærer y-aksen et stykke over origo.
- **Stigning i origo:** $f'(x) = 3x^2 - 14x - 10$, så $f'(0) = -10 < 0$ — grafen er *avtagende* der den krysser y-aksen.
- **Form/proporsjoner:** Nullpunktene er $x = -2,\ 1$ (nær hverandre, til venstre) og $x = 8$ (langt til høyre). Mellom de to venstre nullpunktene har f en *moderat* lokal toppverdi ($f(-0{,}63) \approx 19$), og etterpå en *dyp* lokal bunnverdi ($f(5{,}30) \approx -85$). Altså: en liten topp like til venstre for y-aksen, og en dyp dal til høyre før kurven stiger bratt.

Det er bare graf **C** som har alle disse trekkene: positivt ledende ledd, liten topp over x-aksen rett til venstre for y-aksen, positivt skjæringspunkt med y-aksen, deretter en dyp dal under x-aksen og en bratt stigning til høyre. (Graf **A** har «feil proporsjoner» — der er toppen høy og dalen grunn, motsatt av f.)

$$\boxed{\text{Graf C}}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. a) Bruk en likesidet trekant med side 2 til å vise at $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. b) Trekant ABC med $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle A = 30^\circ$: finn arealet. c) Trekant PQR med $PQ = 8$, $PR = 3$, $\angle P = 60^\circ$: finn QR.

a) Den likesidete trekanten har alle sider lik 2 og alle vinkler 60°. Høyden fra toppen halverer toppvinkelen i to 30°-vinkler og halverer grunnlinjen. Det gir en rettvinklet trekant med

- hypotenus $= 2$ (en av sidene i den likesidete trekanten),
- katet motstående $30^\circ = \frac{2}{2} = 1$ (halve grunnlinjen).

Da er

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}.$$

I den samme rettvinklete trekanten er 60° den andre spisse vinkelen, og kateten med lengde 1 er nå *hosliggende* til 60°:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}.$$

Altså $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

b) Areal med to sider og mellomliggende vinkel:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = \boxed{15}.$$

c) Med cosinussetningen i trekant PQR:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2 \cdot PQ \cdot PR \cdot \cos P = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ.$$

Siden $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$:

$$QR^2 = 64 + 9 - 48 \cdot \tfrac{1}{2} = 73 - 24 = 49 \implies QR = \boxed{7}.$$

Oppgave 6 (1 poeng)

Oppgave. Kari løser likningen $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ i et CAS-verktøy og får svaret $x = x$. Forklar ut fra dette hva en identitet er.

Løsning. Når CAS svarer «$x = x$», betyr det at likningen er sann for **alle** verdier av x — ikke bare for noen spesielle tall. Det er nettopp definisjonen av en **identitet**: en likhet mellom to uttrykk som gjelder for *alle* tillatte verdier av variabelen.

Her er $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ alltid sann, fordi høyresiden bare er venstresiden skrevet på en annen måte (konjugatsetningen). En vanlig likning har derimot bare *bestemte* løsninger; en identitet har «uendelig mange» fordi den holder uansett.

$$\boxed{\text{En identitet er en likhet som er sann for alle verdier av variabelen.}}$$

Oppgave 7 (2 poeng)

Oppgave. Tolk programmet (se PDF): $f(x) = x^2 + 2x - 15$. `x` starter på -5, og en løkke fra $x = -5$ til $x = 5$ oppdaterer `verdi` til den minste verdien av $f(x)$. Hva skrives ut?

Løsning. Programmet går gjennom heltallene $x = -5, -4, \dots, 5$ og holder hele tiden styr på den *minste* funksjonsverdien i variabelen `verdi`. Det skriver altså ut **minste verdi av** $f(x)$ blant disse heltallene.

$f(x) = x^2 + 2x - 15$ er en parabel med bunnpunkt der $x = -\frac{2}{2} = -1$, som er et av heltallene løkka tester. Minste verdi:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16.$$

$$\boxed{\text{Programmet skriver ut } -16}$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Oppgave. Tabell over registrerte tilfeller av kikhoste i Norge (jan 2023 – okt 2024), der x er antall måneder etter desember 2022. a) Vis at $K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$ er en god modell. b) Bestem stigningstallet til linja gjennom $(4, K(4))$ og $(21, K(21))$, og tolk det. c) Hvor mange tilfeller i mai 2025 ifølge modellen?

a) Vi gjør om månedene til x-verdier ($x = 1$ er januar 2023) og sammenligner modellen med tabellen:

Måned	x	$K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$	Faktisk
jan 2023	1	≈ 33	29
mai 2023	5	≈ 69	93
okt 2023	10	≈ 172	164
feb 2024	14	≈ 357	284
aug 2024	20	≈ 1066	1035
okt 2024	22	≈ 1535	1657

Modellverdiene ligger nær de registrerte tallene gjennom hele perioden, og den eksponentielle veksten (ca. 20 % økning per måned) fanger den raske oppgangen godt. Derfor er $K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$ en god modell for perioden. ✓

Et alternativt og mer presist argument er å gjøre eksponentiell regresjon på tabellverdiene i CAS/regneark; den gir nettopp ca. $K(x) \approx 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$.

b) Vi bruker regresjonsmodellen fra a) (CAS gir koeffisientene $a \approx 27{,}81$ og $b \approx 1{,}1987$, dvs. tilnærmet $K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$). Stigningstallet til den rette linja gjennom de to punktene:

$$K(4) = 27{,}81 \cdot 1{,}1987^4 \approx 57{,}4, \qquad K(21) = 27{,}81 \cdot 1{,}1987^{21} \approx 1251{,}4.$$

$$a = \frac{K(21) - K(4)}{21 - 4} = \frac{1251{,}4 - 57{,}4}{17} \approx \boxed{70{,}2}.$$

Tolkning: I gjennomsnitt økte antallet registrerte kikhostetilfeller med omtrent **70 tilfeller per måned** i perioden fra måned 4 (april 2023) til måned 21 (september 2024).

Merk: Bruker man i stedet den avrundede modellen $K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$ helt bokstavelig (med eksakt 1,2), blir stigningstallet litt høyere, ca. 71,8. Fasiten bruker regresjonsverdiene og oppgir 70,2.

c) Mai 2025: januar 2023 er $x = 1$, så mai 2025 er

$$x = 12\ (2023) + 12\ (2024) + 5 = 29.$$

$$K(29) = 27{,}81 \cdot 1{,}1987^{29} \approx \boxed{5336 \text{ tilfeller}}.$$

Merk: Med den avrundede modellen $27{,}8 \cdot 1{,}2^{29}$ får man ca. 5500. Fasiten oppgir 5336 (regresjonsmodellen).

Oppgave 2 (2 poeng)

Oppgave. Små sekker hundemat veier 4,5 kg, store veier 12 kg. En dag ble det solgt 80 sekker med samlet vekt 720 kg. Hvor mange små og store sekker?

Løsning. La s = antall små og l = antall store sekker. Vi setter opp et likningssystem:

$$s + l = 80$$
$$4{,}5\,s + 12\,l = 720$$

Fra den første likningen er $l = 80 - s$. Innsatt:

$$4{,}5\,s + 12(80 - s) = 720 \implies 4{,}5\,s + 960 - 12\,s = 720 \implies -7{,}5\,s = -240,$$

så $s = 32$ og $l = 80 - 32 = 48$.

$$\boxed{\text{32 små sekker og 48 store sekker}}$$

Kontroll: $32 + 48 = 80$ sekker, og $4{,}5 \cdot 32 + 12 \cdot 48 = 144 + 576 = 720$ kg. ✓

Oppgave 3 (4 poeng)

Oppgave. En tolvkant er innskrevet i en sirkel og består av tolv like store, likebeinte trekanter (sentralvinkel 30°). Arealet av tolvkanten er 120. a) Bestem diameteren i sirkelen (eksakt). b) Bestem omkretsen av tolvkanten (eksakt).

a) Hver av de tolv trekantene har to sider lik radien r og mellomliggende (sentral)vinkel 30°. Arealet av én trekant er

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2}\, r \cdot r \cdot \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{r^2}{4}.$$

Hele tolvkanten har areal 120, altså $12 \cdot \frac{r^2}{4} = 120$:

$$3r^2 = 120 \implies r^2 = 40 \implies r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Diameteren blir

$$d = 2r = \boxed{4\sqrt{10}}.$$

b) Hver side i tolvkanten er grunnlinjen i en av trekantene. Med cosinussetningen (to sider r, mellomliggende vinkel 30°):

$$s^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 30^\circ = 2r^2(1 - \cos 30^\circ) = 2 \cdot 40 \left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 80 - 40\sqrt{3}.$$

Det gir én side

$$s = \sqrt{80 - 40\sqrt{3}} = 2\sqrt{20 - 10\sqrt{3}} = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}.$$

(Siste form kommer av at $20 - 10\sqrt{3} = (\sqrt{15} - \sqrt{5})^2$.) Omkretsen er 12 sider:

$$O = 12s = 24\sqrt{15} - 24\sqrt{5} \approx \boxed{39{,}3}.$$

$$\boxed{O = 24\sqrt{15} - 24\sqrt{5}}$$

Oppgave 4 (5 poeng)

Oppgave. Figurer bygges av små grønne kvadrater (Figur 1, 2, 3 vist). a) Sett opp en algoritme for et program som regner ut antall kvadrater i hver av de 20 første figurene. b) Lag programmet. c) Du har 1 000 000 kvadrater og lager figur 1, 2, 3, … Lag et program som finner hvor mange figurer du kan lage, og hvor mange kvadrater du har igjen.

Mønster. Vi teller kvadratene i figurene (legg merke til at midten av «plusset» er åpen/hvit i alle figurene):

$$\text{Figur 1: } 4, \qquad \text{Figur 2: } 9, \qquad \text{Figur 3: } 16.$$

Hver figur har et fylt $(n+1) \times (n+1)$-mønster av kvadrater. Følgen $4, 9, 16, 25, \ldots$ er kvadrattallene fra og med 2^2, altså

$$a_n = (n+1)^2.$$

Kontroll: $a_1 = 2^2 = 4$, $a_2 = 3^2 = 9$, $a_3 = 4^2 = 16$. ✓ (En alternativ skrivemåte er $a_n = n^2 + 2n + 1$. Antall i figur nr. 20: $a_{20} = 21^2 = 441$.)

a) Algoritme (oppgave a).

1. La n løpe fra 1 til 20.
2. For hver n: regn ut antall kvadrater $a_n = (n+1)^2$.
3. Skriv ut figurnummer n og antall kvadrater a_n.

b) Program (Python):

```python
def antall(n):
    return (n + 1) ** 2

for n in range(1, 21):
    print("Figur", n, ":", antall(n), "kvadrater")
# Figur 1 : 4
# Figur 2 : 9
# Figur 3 : 16
# ...
# Figur 20 : 441
```

b) Program (C++):

```cpp
#include <iostream>
int antall(int n) { return (n + 1) * (n + 1); }
int main() {
    for (int n = 1; n <= 20; ++n)
        std::cout << "Figur " << n << " : " << antall(n) << " kvadrater\n";
    // Figur 1 : 4 ... Figur 3 : 16 ... Figur 20 : 441
```

```
    return 0;
}
```

c) Vi har 1 000 000 kvadrater og bygger figur etter figur, og trekker fra antallet hver figur krever, helt til neste figur ikke får plass. Da teller vi hvor mange figurer som ble laget og hva som er igjen.

Program (Python):

```python
def antall(n):
    return (n + 1) ** 2

rest = 1_000_000
n = 0
while rest >= antall(n + 1):
    n += 1
    rest -= antall(n)
print("Antall figurer:", n)      # 142
print("Kvadrater igjen:", rest) # 15017
```

Program (C++):

```cpp
#include <iostream>
int antall(int n) { return (n + 1) * (n + 1); }
int main() {
    long long rest = 1000000;
    int n = 0;
    while (rest >= antall(n + 1)) { ++n; rest -= antall(n); }
    std::cout << "Antall figurer: " << n << "\n";      // 142
    std::cout << "Kvadrater igjen: " << rest << "\n";  // 15017
    return 0;
}
```

$$\boxed{\text{142 figurer, og 15 017 kvadrater igjen}}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Oppgave. Sylinderbokser med volum $V = 450\ \text{cm}^3$. Formler: $V = \pi r^2 h$ og $O = \pi r^2 + 2\pi r h$. a) Fyll ut tabell med h, O og V for $r = 2, 4, 6, 8$. b) Sett opp et funksjonsuttrykk $O(r)$ og lag en grafisk framstilling. c) Hvilken radius gir minst mulig overflate, og hvor stor blir overflaten da?

a) Av $V = \pi r^2 h = 450$ får vi høyden $h = \dfrac{450}{\pi r^2}$, og overflaten settes inn i $O = \pi r^2 + 2\pi r h$:

Radius r (cm)	Høyde h (cm)	Overflate O (cm^2)	Volum V (cm^3)
2	35,8	462,6	450
4	9,0	275,3	450
6	4,0	263,1	450
8	2,2	313,6	450

b) Vi setter $h = \dfrac{450}{\pi r^2}$ inn i overflateformelen. Da forsvinner h:

$$O(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{450}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{900}{r}.$$

$$\boxed{O(r) = \pi r^2 + \frac{900}{r}}$$

Grafen (tegnes i GeoGebra/CAS for $r > 0$) synker bratt for små r, har et **bunnpunkt**, og stiger igjen for store r — en typisk «badekar-kurve». Bunnpunktet gir minste overflate.

c) Minste overflate finnes der $O'(r) = 0$:

$$O'(r) = 2\pi r - \frac{900}{r^2} = 0 \implies 2\pi r^3 = 900 \implies r^3 = \frac{450}{\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{450}{\pi}} \approx 5{,}23 \text{ cm}.$$

Overflaten der:

$$O(5{,}23) = \pi \cdot 5{,}23^2 + \frac{900}{5{,}23} \approx \boxed{258 \text{ cm}^2}.$$

$$\boxed{r \approx 5{,}23 \text{ cm gir minst overflate } O \approx 258 \text{ cm}^2}$$

Interessant: I dette minimumet blir høyden $h = \dfrac{450}{\pi r^2} \approx 5{,}23 \text{ cm} = r$ — den «optimale» boksen er like høy som radien er stor.

Oppgave 6 (4 poeng)

Oppgave. Læreren har tegnet grafene til to rasjonale funksjoner. Grafen til f har *to* vertikale asymptoter (og horisontal asymptote langs x-aksen, med nullpunkt i origo). Grafen til g har *ingen* vertikale asymptoter, en horisontal asymptote, og passer på nullpunkt/skjæring med y-aksen. Finn mulige uttrykk $f(x)$ og $g(x)$, og argumenter.

Funksjonen f. Petter sier at vertikale asymptoter krever at *nevneren er null*. Grafen viser **to** vertikale asymptoter (symmetrisk om y-aksen), at grafen går mot x-aksen for store $|x|$ (horisontal asymptote $y = 0$), og at den passerer gjennom origo (nullpunkt i $x = 0$). En nevner som er null i to punkter symmetrisk om 0 er f.eks. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, og en teller som gir nullpunkt i origo er x:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Argument: Nevneren $x^2 - 1$ er null for $x = \pm 1 \to$ to vertikale asymptoter. Telleren x er null i $x = 0$ $\to$ nullpunkt i origo. Telleren har lavere grad enn nevneren $\to$ horisontal asymptote $y = 0$. Dette stemmer med grafen.

Funksjonen g. Grafen har **ingen** vertikale asymptoter, så nevneren må aldri bli null. Et uttrykk som x^2+1 er positivt for alle x. Johanne minner om at nullpunkt, skjæring med y-aksen og horisontal asymptote må stemme: grafen går gjennom origo ($g(0) = 0$, nullpunkt) og mot x-aksen ($y = 0$) for store $|x|$:

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Argument: Nevneren $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ for alle $x \to$ ingen vertikale asymptoter. Telleren x gir nullpunkt og skjæring med y-aksen i origo ($g(0) = 0$). Lavere tellergrad $\to$ horisontal asymptote $y = 0$. Grafen stiger til en topp og synker mot asymptoten, slik figuren viser.

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}}$$

> *Merk:* Begge oppgavene har mange riktige svar. Det viktige er at *nevneren* styrer de vertikale asymptotene (to nullpunkter for f, ingen for g), og at teller/gradforhold gir riktig nullpunkt og horisontal asymptote.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.