

# Matematikk 1T — Eksempel 2015

## Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

**Om dette løsningsforslaget.** Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

### DEL 1 — Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1 (2 poeng)

**Oppgave.** a) Regn ut  $8,20 \cdot 10^9 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}$  og skriv svaret på standardform. b) Skriv  $\frac{(a^2)^4 \cdot (\frac{b}{a})^2}{a^3 \cdot b^{-2}}$  så enkelt som mulig.

a) Vi multipliserer tallene og legger sammen tierpotensene:

$$8,20 \cdot 10^9 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3} = (8,20 \cdot 1,50) \cdot 10^{9-3} = 12,3 \cdot 10^6.$$

På standardform (ett siffer foran komma):

$$\boxed{1,23 \cdot 10^7}$$

b) Vi bruker potensreglene. Telleren:

$$(a^2)^4 = a^8, \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{teller} = a^8 \cdot \frac{b^2}{a^2} = a^6 b^2.$$

Nevneren er  $a^3 b^{-2}$ . Da blir

$$\frac{a^6 b^2}{a^3 b^{-2}} = a^{6-3} b^{2-(-2)} = \boxed{a^3 b^4}.$$

#### Oppgave 2 (3 poeng)

**Oppgave.** a) Skriv  $(a+b)^2 - (a-b)^2$  så enkelt som mulig. b) Faktoriser og forkort  $\frac{2x+6}{2x^2-18}$ .

a) Vi bruker kvadratsetningene:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = \boxed{4ab}.$$

b) Vi faktorerer teller og nevner:

$$2x + 6 = 2(x + 3), \quad 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3).$$

Da kan vi forkorte felles faktor  $2(x + 3)$ :

$$\frac{2(x + 3)}{2(x - 3)(x + 3)} = \boxed{\frac{1}{x - 3}} \quad (x \neq -3, x \neq 3).$$

### Oppgave 3 (4 poeng)

**Oppgave.**  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ . a) Finn momentan vekstfart i  $x = 1$ . b) Finn eventuelle topp- og bunnpunkter.

a) Momentan vekstfart er den deriverte:

$$g'(x) = x^2 - 2x - 3.$$

I  $x = 1$ :

$$g'(1) = 1 - 2 - 3 = \boxed{-4}.$$

b) Topp- og bunnpunkter finner vi der  $g'(x) = 0$ :

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = -1 \text{ eller } x = 3.$$

Vi bruker den andrederiverte  $g''(x) = 2x - 2$  til å avgjøre type:

- $x = -1$ :  $g''(-1) = -4 < 0 \implies$  **toppunkt**.  $g(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 4 = \frac{17}{3} \approx 5,7$ .
- $x = 3$ :  $g''(3) = 4 > 0 \implies$  **bunnpunkt**.  $g(3) = 9 - 9 - 9 + 4 = -5$ .

$$\boxed{\text{Toppunkt } (-1, \frac{17}{3}), \quad \text{bunnpunkt } (3, -5)}.$$

### Oppgave 4 (5 poeng)

**Oppgave.** a) En sirkel og et kvadrat har begge omkrets 16. Hvilken figur har størst areal? b) Arealet av et trapes er  $A = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$ . Uttrykk  $h$  ved  $A$ ,  $a$  og  $b$ . c) Et trapes har areal  $18,0 \text{ cm}^2$ , høyde  $3,0 \text{ cm}$ , og den ene parallelle siden er  $2,0 \text{ cm}$  lengre enn den andre. Finn lengdene av de parallelle sidene.

a) *Kvadrat*: omkrets 16 gir side  $\frac{16}{4} = 4$ , så areal  $= 4^2 = 16$ .

*Sirkel*: omkrets  $2\pi r = 16$  gir  $r = \frac{8}{\pi}$ . Areal:

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 = \frac{64}{\pi} \approx 20,4.$$

Siden  $\frac{64}{\pi} \approx 20,4 > 16$ , har **sirkelen størst areal**.

Sirkelen har størst areal ( $\frac{64}{\pi} \approx 20,4$  mot 16).

b) Vi løser formelen med hensyn på  $h$ :

$$A = \frac{(a+b)}{2} \cdot h \implies h = \frac{2A}{a+b}.$$

c) La den korteste parallelle siden være  $a$ . Da er den andre  $a+2$ . Med  $A = 18,0$  og  $h = 3,0$ :

$$18 = \frac{a + (a+2)}{2} \cdot 3 = \frac{(2a+2) \cdot 3}{2} = 3(a+1).$$

Da er  $a+1 = 6$ , altså  $a = 5$ . Den andre siden er  $a+2 = 7$ .

De parallelle sidene er 5,0 cm og 7,0 cm.

### Oppgave 5 (3 poeng)

**Oppgave.** a) Tegn en rettvinklet trekant  $ABC$  der  $\sin B = \frac{2}{5}$ . b) To trekkanter er gitt i figuren: trekant  $ABC$  med sider 5 og 4 og mellomliggende vinkel  $140^\circ$ , og trekant  $DEF$  med sider 5 og 4 og mellomliggende vinkel  $30^\circ$ . Undersøk hvilken som har størst areal.

a) I en rettvinklet trekant er  $\sin B = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$ . Vi velger derfor en trekant med rett vinkel i (for eksempel)  $C$ , der

$$\text{motstående katet til } B = 2, \quad \text{hypotenus} = 5.$$

Den siste kateten finnes med Pytagoras:  $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ . Skissen blir en rettvinklet trekant med hypotenus 5, kateten motstående  $B$  lik 2 og den andre kateten  $\sqrt{21} \approx 4,58$ . (Alle trekkanter formlike med denne er gyldige svar.)

b) Vi bruker arealformelen  $A = \frac{1}{2} ab \sin V$  for begge trekantene. Begge har  $ab = 5 \cdot 4 = 20$ , så det er bare sinusverdien til den mellomliggende vinkelen som skiller dem:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 140^\circ = 10 \sin 140^\circ \approx 6,43,$$

$$A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5,00.$$

Siden  $\sin 140^\circ \approx 0,643 > \sin 30^\circ = 0,5$ , har

trekant  $ABC$  størst areal ( $\approx 6,43$  mot  $5,00$ ).

### Oppgave 6 (4 poeng)

**Oppgave.** a) Finn likningen for den rette linjen gjennom  $(1, 2)$  og  $(2, 4)$ . b) For  $f(x) = x^2 + 4$ , bruk definisjonen av den deriverte til å vise at  $f'(x) = 2x$ .

a) Stigningstallet er

$$a = \frac{4 - 2}{2 - 1} = 2.$$

Likningen  $y = 2x + b$  gjennom  $(1, 2)$  gir  $2 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 0$ . Altså

$$y = 2x.$$

b) Den deriverte ved grensedefinisjonen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Vi regner ut telleren:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^2 + 4] - [x^2 + 4] = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 4 - x^2 - 4 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Setter inn og forkorter  $\Delta x$ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \boxed{2x}.$$

### Oppgave 7 (4 poeng)

**Oppgave.** Siri har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker (10 til sammen). Hun tar tilfeldig to sokker. a) Sannsynligheten for to rosa sokker. b) Sannsynligheten for én rosa og én sokk med annen farge.

a) Det er  $\binom{10}{2} = 45$  måter å trekke to sokker på. Antall måter å trekke begge de rosa er  $\binom{2}{2} = 1$ :

$$P(\text{to rosa}) = \frac{1}{45} \approx 0,022. \quad \boxed{\frac{1}{45}}$$

*Alternativt:*  $P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$

b) Vi vil ha nøyaktig én rosa og én av en annen farge. Det er 2 rosa å velge blant og 8 ikke-rosa:

$$P(1 \text{ rosa}, 1 \text{ annen}) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \cdot 8}{45} = \frac{16}{45} \approx 0,356. \quad \boxed{\frac{16}{45}}$$

### Oppgave 8 (6 poeng)

**Oppgave.** a) Løs  $-\frac{1}{4}x + 2 = 2x - \frac{5}{2}$ . b) Løs systemet  $x + y = 7$ ,  $3x - 2y = -4$ . c) Løs ulikheten  $-2x^2 + 9x + 5 \leq 0$ .

a) Vi ganger hele likningen med 4 for å bli kvitt brøkene:

$$-x + 8 = 8x - 10 \implies 8 + 10 = 8x + x \implies 18 = 9x \implies \boxed{x = 2}.$$

b) Fra den første likningen er  $y = 7 - x$ . Sett inn i den andre:

$$3x - 2(7 - x) = -4 \implies 3x - 14 + 2x = -4 \implies 5x = 10 \implies x = 2.$$

Da er  $y = 7 - 2 = 5$ .

$$\boxed{x = 2, \quad y = 5}$$

c) Vi finner nullpunktene til  $-2x^2 + 9x + 5$ :

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{-4} = \frac{-9 \pm 11}{-4} \implies x = -\frac{1}{2} \text{ eller } x = 5.$$

Parabelen åpner **nedover** ( $a = -2 < 0$ ), så uttrykket er negativt (eller null) *utenfor* nullpunktene:

$$\boxed{x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x \geq 5}$$

### Oppgave 9 (2 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = 4x^2 + bx + c$  har bare ett nullpunkt, og grafen skjærer  $y$ -aksen i  $(0, 1)$ . Bestem  $b$  og  $c$ .

**Løsning.** At grafen skjærer  $y$ -aksen i  $(0, 1)$  betyr  $f(0) = c = 1$ .

Ett nullpunkt betyr at diskriminanten er null:

$$b^2 - 4ac = 0 \implies b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \implies b^2 = 16 \implies b = \pm 4.$$

$$\boxed{c = 1, \quad b = 4 \text{ eller } b = -4}$$

Begge gir et gyldig dobbeltnullpunkt:  $b = 4$  gir nullpunkt i  $x = -\frac{1}{2}$ , og  $b = -4$  gir nullpunkt i  $x = \frac{1}{2}$ .

### Oppgave 10 (3 poeng)

**Oppgave.**  $\triangle PQM$  med  $P(0, x)$ ,  $Q(x, 0)$ ,  $M(4, 2)$  er innskrevet i  $\triangle AOB$  ( $A(0, 4)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(8, 0)$ ).

a) Vis at arealet er  $T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ ,  $x \in [0, 4]$ . b) Bestem  $x$  slik at arealet blir størst mulig.

a) Med hjørnene  $P(0, x)$ ,  $Q(x, 0)$ ,  $M(4, 2)$  bruker vi arealformelen (skolissemetoden):

$$T = \frac{1}{2} |x_P(y_Q - y_M) + x_Q(y_M - y_P) + x_M(y_P - y_Q)|.$$

Setter inn  $P(0, x)$ ,  $Q(x, 0)$ ,  $M(4, 2)$ :

$$T = \frac{1}{2} |0 \cdot (0 - 2) + x \cdot (2 - x) + 4 \cdot (x - 0)| = \frac{1}{2} |2x - x^2 + 4x| = \frac{1}{2} |-x^2 + 6x|.$$

For  $x \in [0, 4]$  er  $-x^2 + 6x = x(6 - x) \geq 0$ , så vi kan droppe tallverdittegnet:

$$T(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 6x) = \boxed{-\frac{1}{2}x^2 + 3x}.$$

b) Maksimum finner vi der  $T'(x) = 0$ :

$$T'(x) = -x + 3 = 0 \implies x = 3.$$

Siden  $T''(x) = -1 < 0$  er dette et toppunkt. Arealet blir da

$$T(3) = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 9 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

$$\boxed{x = 3 \text{ gir størst areal, } T(3) = 4,5.}$$

## DEL 2 — Med hjelpemidler

*Merk:* Dette eksempelsettet inneholder med vilje flere CAS-oppgaver enn et ordinært sett, for å vise eksempler på bruk av digitale verktøy.

### Oppgave 1 (4 poeng)

**Oppgave.** I  $\triangle ABC$  er  $\angle C = 90^\circ$ , og høyden fra  $C$  på  $AB$  er 6. Trekanten har omkrets 30. Sidene er  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . a) Forklar likningssystemet  $a + b + c = 30$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $ab = 6c$ . b) Bruk CAS til å bestemme  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

a) Vi forklarer hver likning:

- $a + b + c = 30$ : omkretsen er summen av de tre sidene.
- $a^2 + b^2 = c^2$ : trekanten er rettvinklet i  $C$ , så  $c = AB$  er hypotenusen og Pytagoras gjelder.
- $ab = 6c$ : arealet kan regnes på to måter. Med katetene  $a$  og  $b$  er  $A = \frac{1}{2}ab$ . Med grunnlinjen  $c = AB$  og høyden 6 er  $A = \frac{1}{2}c \cdot 6 = 3c$ . Setter vi disse like:  $\frac{1}{2}ab = 3c$ , altså  $ab = 6c$ .

b) Systemet løses i CAS (eller for hånd ved innsetting). Resultatet er

$$\boxed{a = 7,5, \quad b = 10, \quad c = 12,5}$$

(eller  $a = 10, b = 7,5$  — sidene  $a$  og  $b$  er ombyttbare). Dette er en 3-4-5-trekant skalert med faktoren 2,5. Kontroll:  $7,5 + 10 + 12,5 = 30$ ,  $7,5^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25 = 12,5^2$ , og  $7,5 \cdot 10 = 75 = 6 \cdot 12,5$ . ✓

### Oppgave 2 (4 poeng)

**Oppgave.** I en klasse er det 30 elever. 20 er fornøyde med matematikkarakteren. 80 % av de fornøyde gjør lekser hver time; 10 % av de som ikke er fornøyde gjør også lekser hver time. a) Lag valgtre eller krysstabell. b)  $P$ (en tilfeldig elev gjør lekser). c)  $P$ (fornøyd | gjør lekser).

a) Vi regner ut antallet i hver gruppe:

- Fornøyde: 20. Av disse gjør 80 %  $\cdot 20 = 16$  lekser, og 4 gjør ikke.
- Ikke fornøyde:  $30 - 20 = 10$ . Av disse gjør 10 %  $\cdot 10 = 1$  lekser, og 9 gjør ikke.

**Krysstabell:**

	Gjør lekser	Gjør ikke lekser	Sum
Fornøyd	16	4	20
Ikke fornøyd	1	9	10
Sum	17	13	30

b) Totalt  $16 + 1 = 17$  elever gjør lekser hver time:

$$P(\text{lekser}) = \frac{17}{30} \approx 0,567 \approx 56,7\%. \quad \boxed{\frac{17}{30}}$$

c) Av de 17 som gjør lekser er 16 fornøyde:

$$P(\text{fornøyd} \mid \text{lekser}) = \frac{16}{17} \approx 0,941 \approx 94,1\%. \quad \boxed{\frac{16}{17}}$$

### Oppgave 3 (2 poeng)

**Oppgave.** Et kartutsnitt viser en strekning  $AB$ . Det er målt  $AC = 40,0$  m,  $\angle A = 69,7^\circ$  (vinkelen  $\angle CAB$ ) og  $\angle C = 94,9^\circ$  (vinkelen  $\angle ACB$ ). Bruk CAS til å bestemme avstanden fra  $A$  til  $B$ .

**Løsning.** I trekant  $ABC$  kjenner vi siden  $AC = 40,0$  og to vinkler. Den tredje vinkelen er

$$\angle B = 180^\circ - 69,7^\circ - 94,9^\circ = 15,4^\circ.$$

Siden  $AB$  ligger motstående  $\angle C$  og  $AC$  ligger motstående  $\angle B$ , gir sinussetningen

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \implies AB = AC \cdot \frac{\sin 94,9^\circ}{\sin 15,4^\circ} = 40,0 \cdot \frac{\sin 94,9^\circ}{\sin 15,4^\circ}.$$

$$AB \approx 40,0 \cdot \frac{0,9963}{0,2656} \approx 150,1 \text{ m.}$$

$$AB \approx 150 \text{ m}$$

#### Oppgave 4 (2 poeng)

**Oppgave.** Tre trær danner en trekant med sider 14,0 m, 20,0 m og 24,0 m. Bruk CAS til å bestemme arealet.

**Løsning.** Vi bruker Herons formel. Halve omkretsen er

$$s = \frac{14 + 20 + 24}{2} = 29.$$

Arealet:

$$A = \sqrt{s(s-14)(s-20)(s-24)} = \sqrt{29 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{19575} \approx 139,9 \text{ m}^2.$$

$$A \approx 140 \text{ m}^2$$

#### Oppgave 5 (3 poeng)

**Oppgave.**  $f(x) = \frac{10}{x^2} + 5$ ,  $x > 0$ .  $A = (0,0)$ ,  $B$  ligger på  $x$ -aksen,  $C$  ligger på grafen til  $f$ , og  $\angle B = 90^\circ$ . Bruk CAS til å finne den eksakte  $x$  som gjør arealet av  $\triangle ABC$  minst mulig, og hvor stort arealet blir.

**Løsning.** Siden  $\angle B = 90^\circ$  og  $B$  ligger på  $x$ -aksen, ligger  $C$  rett over  $B$ . La  $B = (x, 0)$ ; da er  $C = (x, f(x))$ . De to katetene blir

$$AB = x \quad (\text{langs } x\text{-aksen}), \quad BC = f(x) = \frac{10}{x^2} + 5.$$

Arealet av den rettvinklede trekanten:

$$T(x) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x \left( \frac{10}{x^2} + 5 \right) = \frac{5}{x} + \frac{5x}{2}.$$

Vi deriverer og setter lik null:

$$T'(x) = -\frac{5}{x^2} + \frac{5}{2} = 0 \implies \frac{5}{x^2} = \frac{5}{2} \implies x^2 = 2 \implies x = \sqrt{2}.$$

(Fortegnsskifte fra negativ til positiv  $\implies$  minimum.) Det minste arealet er

$$T(\sqrt{2}) = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07.$$

$$x = \sqrt{2}, \quad T_{\min} = 5\sqrt{2} \approx 7,07.$$

### Oppgave 6 (6 poeng)

**Oppgave.** Folketallet i to bygder i perioden 2006–2014 ( $x = \text{år etter 2006}$ ):

$$A(x) = 0,54x^3 + 6,32x^2 + 33,8x + 1410, \quad B(x) = -0,20x^3 - 5,32x^2 + 18,8x + 1693, \quad x \in [0, 8].$$

a) Bruk graftegner til å bestemme 1) når folketallet i bygd B var størst og hvor mange som bodde der da, 2) når folketallet var likt i bygdene, 3) når samlet folketall passerte 3500. b) Bruk CAS til å løse a)2). c) Løs a)1) ved derivasjon.

a) (**graftegner**). Vi tegner  $A(x)$  og  $B(x)$  og leser av:

1. **Bygd B størst:**  $B$  har toppunkt ved  $x \approx 1,6$ , der  $B \approx 1709$ . Det vil si rundt **2007–2008** med om lag **1700 innbyggere**.
2. **Likt folketall:** grafene skjærer hverandre ved  $x \approx 3,9$  (innenfor  $[0, 8]$ ), altså rundt **2010**, da begge bygder hadde om lag **1670 innbyggere**.
3. **Samlet folketall passerer 3500:** vi tegner  $S(x) = A(x) + B(x)$  og finner  $S(x) = 3500$  ved  $x \approx 5,7$ . Samlet folketall passerte 3500 rundt **2011–2012**. (Kontroll:  $S(0) \approx 3103$ ,  $S(8) \approx 3762$ , så summen vokser og krysser 3500 én gang.)

b) (**CAS**) — løser a)2). Vi løser likningen  $A(x) = B(x)$ :

$$0,54x^3 + 6,32x^2 + 33,8x + 1410 = -0,20x^3 - 5,32x^2 + 18,8x + 1693.$$

Samler alt på én side:

$$0,74x^3 + 11,64x^2 + 15x - 283 = 0.$$

CAS gir én løsning i intervallet  $[0, 8]$ :

$$x \approx 3,93 \text{ (altså rundt år 2010), } A \approx B \approx 1673.$$

c) (**derivasjon**) — løser a)1). Vi deriverer  $B$  og setter lik null:

$$B'(x) = -0,60x^2 - 10,64x + 18,8 = 0.$$

abc-formelen gir

$$x = \frac{10,64 \pm \sqrt{10,64^2 + 4 \cdot 0,60 \cdot 18,8}}{2 \cdot (-0,60)} = \frac{10,64 \pm \sqrt{158,3}}{-1,2}.$$

Den positive løsningen i  $[0, 8]$  er  $x \approx 1,62$ . Siden  $B'' < 0$  er dette et toppunkt. Folketallet er da

$$B(1,62) \approx 1709.$$

$$x \approx 1,6 \text{ (rundt 2007–2008)}, \quad B_{\max} \approx 1700 \text{ innbyggere.}$$

### Oppgave 7 (3 poeng)

**Oppgave.** Et vindu er satt sammen av et rektangel og en halvsirkel oppå (halvsirkelens diameter er rektangelets bredde). Vinduet har omkrets 8,0 m. Bestem radius  $r$  i halvsirkelen slik at arealet blir størst mulig, og finn dette arealet.

**Løsning.** La rektangelet ha bredde  $2r$  (lik halvsirkelens diameter) og høyde  $h$ . Omkretsen til vinduet består av bunnen, de to sidene og halvsirkelbuen (diameteren er **inni** figuren og teller ikke):

$$O = 2r + 2h + \pi r = 8.$$

Løser vi for  $h$ :

$$h = \frac{8 - 2r - \pi r}{2} = 4 - r - \frac{\pi r}{2}.$$

Arealet er rektangel pluss halvsirkel:

$$A(r) = 2r \cdot h + \frac{1}{2}\pi r^2 = 2r \left(4 - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 8r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = 8r - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2.$$

Vi deriverer og setter lik null:

$$A'(r) = 8 - 4r - \pi r = 0 \implies r(4 + \pi) = 8 \implies r = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,12 \text{ m.}$$

Siden  $A''(r) = -4 - \pi < 0$  er dette et maksimum. Det største arealet er

$$A\left(\frac{8}{4 + \pi}\right) = \frac{32}{4 + \pi} \approx 4,48 \text{ m}^2.$$

$$r = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,12 \text{ m}, \quad A_{\max} = \frac{32}{4 + \pi} \approx 4,48 \text{ m}^2.$$

(Legg merke til at  $h = 4 - r - \frac{\pi}{2}r = r$  ved maksimum — den rette delen av vinduet er da like høy som radien.)

---

*Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: [matematikk.net](http://matematikk.net). Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.*