

Matematikk 1T — Eksempelsett 1

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

Hovedgruppe 1 — Kortsvar

Her trenger du ikke vise utregning; svaret gis som et tall. Vi tar likevel med utregningen.

Oppgave 1 (Herons formel)

Oppgave. Bruk Herons formel $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ med $s = \frac{a+b+c}{2}$ til å finne arealet av trekanten ABC med sider 13 cm, 14 cm og 15 cm.

Løsning. Først halve omkretsen:

$$s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Sett inn i Herons formel:

$$T = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84.$$

$$T = 84 \text{ cm}^2$$

Oppgave 2 (Lufttrykk på Mount Everest)

Oppgave. Lufttrykket ved havoverflaten er 1013 millibar. Det avtar med 12 % per kilometer høyde. Mount Everest er 8848 m = 8,848 km høyt. Hvor stort er lufttrykket på toppen?

Løsning. En nedgang på 12 % per km gir vekstfaktor 0,88 per km. Etter 8,848 km er trykket

$$P = 1013 \cdot 0,88^{8,848} \approx 1013 \cdot 0,3227 \approx 327 \text{ millibar.}$$

$$P \approx 327 \text{ millibar}$$

Hovedgruppe 2 — Forklar og begrunn

Her skal framgangsmåten vises og resultatene begrunnes.

Oppgave 3 (Kvadrat der diagonalen er én lengre enn siden)

Oppgave. I et kvadrat er diagonalen nøyaktig én enhet lengre enn sidekanten. Bestem den eksakte lengden av sidekanten. Vis utregning.

Løsning. La sidekanten være s . I et kvadrat er diagonalen $d = s\sqrt{2}$ (Pytagoras: $d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2$). Diagonalen er én enhet lengre enn siden, så

$$s\sqrt{2} = s + 1.$$

Vi samler s -leddene på én side:

$$s\sqrt{2} - s = 1 \implies s(\sqrt{2} - 1) = 1 \implies s = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Vi rasjonaliserer ved å gange med $\sqrt{2} + 1$ i teller og nevner:

$$s = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

$$s = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41 \text{ enheter}$$

Oppgave 4 (Tolke og utvide et program)

Oppgave. Monica har skrevet et program (med kommentarer) som definerer $f(x) = x^2 - 2$, lager 400 jevnt fordelte x -verdier i $[-2, 2]$, regner ut tilhørende y -verdier, og skriver «Jeg har funnet et nullpunkt.» hver gang to nabopunkter har produkt ≤ 0 . a) Forklar hva som skjer når programmet kjøres, og begrunn. b) Utvid programmet slik at det også skriver ut tilnærmede nullpunkter.

a) **Hva skjer.** Funksjonen $f(x) = x^2 - 2$ har nullpunkter der $x^2 = 2$, altså

$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414.$$

Begge ligger inne i intervallet $[-2, 2]$. Testen $Y[i] * Y[i+1] <= 0$ er sann nettopp når f skifter fortegn mellom to nabopunkter (eller treffer null) — altså der grafen krysser x -aksen. Siden grafen krysser aksene to ganger (ved $x = -\sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$), blir betingelsen oppfylt to ganger.

Programmet skriver «Jeg har funnet et nullpunkt.» to ganger.

b) **Utvidelse.** Vi skriver ut midtpunktet $\frac{X[i]+X[i+1]}{2}$ som en tilnærming til nullpunktet hver gang fortegnsskiftet skjer.

```

from numpy import linspace

def f(x):
    return x ** 2 - 2

X = linspace(-2, 2, 400)
Y = f(X)

for i in range(0, 399):
    if Y[i] * Y[i + 1] <= 0:
        nullpunkt = (X[i] + X[i + 1]) / 2
        print("Jeg har funnet et nullpunkt nær x =", round(nullpunkt, 4))
# Utskrift:
# Jeg har funnet et nullpunkt nær x = -1.4135
# Jeg har funnet et nullpunkt nær x = 1.4135

#include <iostream>
#include <cmath>

double f(double x) { return x * x - 2; }

int main() {
    const int N = 400;
    double X[N], Y[N];
    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        X[i] = -2.0 + 4.0 * i / (N - 1); // 400 punkter jevnt i [-2, 2]
        Y[i] = f(X[i]);
    }
    for (int i = 0; i < N - 1; ++i) {
        if (Y[i] * Y[i + 1] <= 0) {
            double nullpunkt = (X[i] + X[i + 1]) / 2;
            std::cout << "Jeg har funnet et nullpunkt naer x = " << nullpunkt << "\n";
        }
    }
    return 0;
    // Utskrift:
    // Jeg har funnet et nullpunkt naer x = -1.41353
    // Jeg har funnet et nullpunkt naer x = 1.41353
}

```

Begge programmene finner tilnærmingene $x \approx \pm 1,414$, i samsvar med $\pm\sqrt{2}$.

Oppgave 5 (Temperaturgraf og stigningstall)

Oppgave. Grafen viser temperaturen ved Lindesnes fyr x timer etter midnatt. Den rette linja gjennom punktene $(4, 4,7)$ og $(14, k)$ har stigningstall $0,26$. a) Gi en praktisk tolkning av stigningstallet. b) Bestem k . Vis utregning.

a) Praktisk tolkning. Stigningstallet $0,26$ er den gjennomsnittlige *endringen i temperatur per time* langs linja. Mellom kl. 04 og kl. 14 stiger temperaturen i gjennomsnitt med ca. $0,26$ °C for hver

time som går.

b) **Bestemme** k . Stigningstallet mellom de to punktene er

$$\frac{k - 4,7}{14 - 4} = 0,26.$$

Vi løser for k :

$$k - 4,7 = 0,26 \cdot 10 = 2,6 \implies k = 4,7 + 2,6 = 7,3.$$

$$\boxed{k = 7,3 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Oppgave 6 (Den deriverte ut fra tangenter)

Oppgave. Figuren viser grafen til en tredjegradsfunksjon f sammen med tangentene i tre punkter. Bruk tangentene til å bestemme et uttrykk for den deriverte f' .

Løsning. Den deriverte i et punkt er lik stigningstallet til tangenten i punktet. Fra figuren leser vi av tre tangenter:

- Tangenten i toppunktet (rundt $x = -1$) er **vannrett**, så $f'(-1) = 0$.
- Tangenten i bunnpunktet (rundt $x = 1$) er **vannrett**, så $f'(1) = 0$.
- Den skrå tangenten i $(0, 4)$ går også gjennom de avmerkede punktene $(-1, 7)$ og $(2, -2)$ på linja. Stigningstallet er

$$\frac{-2 - 7}{2 - (-1)} = \frac{-9}{3} = -3,$$

så $f'(0) = -3$.

Siden f er en tredjegradsfunksjon, er f' en andregradsfunksjon. Den har nullpunkter i $x = -1$ og $x = 1$, så

$$f'(x) = a(x + 1)(x - 1) = a(x^2 - 1).$$

Konstanten a finner vi fra $f'(0) = -3$:

$$f'(0) = a(0 - 1) = -a = -3 \implies a = 3.$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}$$

Kontroll: $f'(-1) = 3 - 3 = 0 \checkmark$, $f'(1) = 3 - 3 = 0 \checkmark$, $f'(0) = -3 \checkmark$.

Oppgave 7 (Delelighet og polynomdivisjon)

Oppgave. Gitt polynomet $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x + 4$. a) Gjør rede for hvordan du kan avgjøre om $P(x)$ er delelig med $(2x - 1)$ uten å utføre divisjonen. b) Robina har utført divisjonen $P(x) : (2x - 1) = x^2 + 2x - 4$. Vurder besvarelsen hennes. c) Robina mener faktoriseringen er $(2x - 1)(x + 2)(x - 2)$. Grete viser henne en skisse av grafen til P . Hvordan kan Grete bruke skissen til å vurdere faktoriseringen?

a) Avgjøre delelighet uten divisjon. Et polynom P er delelig med $(2x - 1)$ hvis og bare hvis $x = \frac{1}{2}$ er et nullpunkt (faktorteoremet: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$). Vi setter inn:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{4} - 11 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{11}{2} + 4 = \frac{1+5-22+16}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

Siden $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, er $P(x)$ **delelig med** $(2x - 1)$.

b) Vurdering av Robinas divisjon. Robina konkluderer riktig med at resten blir 0 (polynomet er delelig), men **kvotienten hennes er feil**. I oppstillingen har hun gjort to fortegns-/regnefeil som tilfeldigvis opphever hverandre:

- *Første trinn:* Etter $2x^3 - (2x^3 - x^2)$ skal man ha $5x^2 + x^2 = 6x^2$, men hun skriver $4x^2$ (hun har regnet $5x^2 - x^2$ i stedet for $5x^2 - (-x^2)$).
- *Andre trinn:* $2x \cdot (2x - 1) = 4x^2 - 2x$, men hun skriver $4x^2 - 3x$.

Den korrekte divisjonen gir

$$2x^3 + 5x^2 - 11x + 4 = (2x - 1)(x^2 + 3x - 4),$$

altså **kvotient** $x^2 + 3x - 4$, ikke $x^2 + 2x - 4$. Det ser man også ved å prøve: $(2x - 1)(x^2 + 2x - 4) = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 4 \neq P(x)$.

$P(x)$ er delelig med $(2x - 1)$, men riktig kvotient er $x^2 + 3x - 4$

c) Vurdering med grafen. Robinas faktorisering $(2x - 1)(x + 2)(x - 2)$ ville bety at P har nullpunkter i $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ og $x = 2$ — altså at grafen krysser x -aksen i $x = -2$ og $x = 2$. På Gretes skisse krysser ikke grafen aksene ved disse x -verdiene, så faktoriseringen kan **ikke** stemme. (Regnekontroll: $P(2) = 18 \neq 0$ og $P(-2) = 30 \neq 0$.) Riktig faktorisering, fra kvotienten i b), er

$$P(x) = (2x - 1)(x^2 + 3x - 4) = (2x - 1)(x - 1)(x + 4),$$

med nullpunkter $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = -4$.

Oppgave 8 (Areal av trekant mellom parallelle linjer)

Oppgave. Punktene A , B , C ligger på to parallelle linjer m og n (med C på m , og A , B på n). Det er gitt $AB = 7$, $AC = 5$, og avstanden mellom linjene er 4. La v være vinkelen ved A mellom linja n og siden AC . a) Forklar at $\sin v = \sin \angle BAC$. b) Beregn arealet av $\triangle ABC$ — både uten og med arealsetningen.

a) **Forklaring.** Punktene A og B ligger på samme rette linje n . Vinkelen v (mellom AC og linja n på den ene siden av A) og vinkelen $\angle BAC$ (mellom AC og AB) ligger på hver sin side av punktet A langs linja n . De to vinklene er **supplementvinkler** — til sammen 180° :

$$v + \angle BAC = 180^\circ.$$

For supplementvinkler gjelder $\sin v = \sin(180^\circ - v)$, og derfor

$$\boxed{\sin v = \sin \angle BAC.}$$

b) **Areal.**

Uten arealsetningen. Vi bruker $AB = 7$ som grunnlinje. Høyden i trekanten fra C ned på linja n er nettopp avstanden mellom de parallelle linjene, $h = 4$:

$$T = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$

Med arealsetningen. Arealsetningen gir $T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$. Høyden fra C er $h = AC \cdot \sin v = 4$, og siden $\sin v = \sin \angle BAC$ er $AC \cdot \sin \angle BAC = 4$. Da

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \underbrace{AC \cdot \sin \angle BAC}_{=4} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14.$$

Begge metodene gir samme svar:

$$\boxed{T = 14}$$

Hovedgruppe 3 — Utforsking, problemløsning og modellering

Her formulerer du selv hva du vil undersøke. Nedenfor er ett forslag til besvarelse.

Oppgave 9 (Hannes algoritme — største kvadrat)

Oppgave. Hanne dekker et rektangel med hele sidekanter med små, like store kvadrater som ligger tett inntil hverandre. Figurene viser at hun gjentatte ganger legger inn det største mulige kvadratet i det området som er igjen. a) Lag en algoritme som beskriver framgangsmåten. b) Lag et program (ut fra algoritmen) som bestemmer hvor store sidekantene i kvadratene maksimalt kan være, gitt sidelengdene i rektangelet.

Idé. Figurene viser den geometriske formen av **Euklids algoritme**: man trekker stadig det største kvadratet ut av det gjenværende rektangelet. Den maksimale kvadratsiden som dekker hele rektangelet uten å gå opp i biter, er **største felles divisor** (SFD / gcd) av de to sidelengdene.

a) **Algoritme (med ord).**

1. La a og b være sidelengdene i rektangelet (hele tall).
2. Så lenge $b \neq 0$: la den nye b være resten av a delt på b , og la den nye a være den gamle b .

3. Når $b = 0$, er svaret den gjestående verdien a . Dette er den største mulige kvadratsiden.

Forklaring: hvert «største kvadrat» man trekker ut, tilsvarer å trekke den korte siden fra den lange gjentatte ganger — altså å regne ut resten. Prosessen stopper når et kvadrat går nøyaktig opp i resten av rektangelet.

b) Program.

```
def storste_kvadrat(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a

# Eksempel: rektangel 18 x 12
print(storste_kvadrat(18, 12)) # 6
# Eksempel: rektangel 35 x 14
print(storste_kvadrat(35, 14)) # 7

#include <iostream>

int storste_kvadrat(int a, int b) {
    while (b != 0) {
        int rest = a % b;
        a = b;
        b = rest;
    }
    return a;
}

int main() {
    std::cout << storste_kvadrat(18, 12) << "\n"; // 6
    std::cout << storste_kvadrat(35, 14) << "\n"; // 7
    return 0;
}
```

Begge programmene gir samme svar. For et 18×12 -rektangel er største kvadratside 6, og for 35×14 er den 7.

$$\boxed{\text{Største kvadratside} = \text{gcd}(a, b)}$$

Oppgave 10 (Utforsk en rasjonal funksjon)

Oppgave. Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{a(x-1)(x+b)}{x^2-1},$$

der a og b er reelle tall. Utforsk og beskriv egenskapene til f .

Løsning (utforsking). Vi forenkler først. Nevneren faktoriseres som

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

så for $x \neq 1$ kan vi forkorte felles faktor $(x - 1)$:

$$f(x) = \frac{a(x-1)(x+b)}{(x-1)(x+1)} = \frac{a(x+b)}{x+1}, \quad x \neq 1, x \neq -1.$$

Definisjonsmengden er $x \neq 1$ og $x \neq -1$ (begge gjør den opprinnelige nevneren null).

Egenskaper i det generelle tilfellet ($a \neq 0, b \neq 1, b \neq -1$):

- **Hull (punktert graf) i $x = 1$.** Faktoren $(x - 1)$ forkortes, så grafen følger den forenklete funksjonen, men har et «hull» i $x = 1$. Hullets y -verdi er $\frac{a(1+b)}{1+1} = \frac{a(1+b)}{2}$.
- **Vertikal asymptote $x = -1$.** Faktoren $(x + 1)$ i nevneren blir igjen og gir en loddrett asymptote (så lenge telleren ikke også er null der, dvs. $b \neq 1$).
- **Horisontal asymptote $y = a$.** For store $|x|$ går $\frac{a(x+b)}{x+1} \rightarrow a$, fordi teller og nevner har samme grad og forholdet mellom de ledende koeffisientene er a .
- **Nullpunkt $x = -b$.** Funksjonen er null der telleren $a(x+b)$ er null, altså $x = -b$ (gyldig så lenge $-b \neq 1$ og $-b \neq -1$).
- **Skjæring med y -aksen:** $f(0) = \frac{a \cdot b}{1} = ab$.

Spesialtilfeller:

- $b = 1$: Da er $f(x) = \frac{a(x+1)}{x+1} = a$ for $x \neq \pm 1$ — en vannrett linje $y = a$ med to hull (i $x = 1$ og $x = -1$). Ingen asymptote, ingen nullpunkt.
- $b = -1$: Da er $f(x) = \frac{a(x-1)}{x+1}$, men telleren har nå (i original form) en ekstra $(x - 1)$; den forenklete funksjonen er $\frac{a(x-1)}{x+1}$ med hull i $x = 1$, vertikal asymptote $x = -1$ og horisontal asymptote $y = a$. Nullpunktet $x = -b = 1$ faller sammen med hullet, så grafen har ikke noe egentlig nullpunkt.
- $a = 0$: Da er $f(x) = 0$ for alle x i definisjonsmengden — den konstante nullfunksjonen (med hull i $x = \pm 1$).

Oppsummering. I det generelle tilfellet er f en rasjonal funksjon med et **hull** i $x = 1$, **vertikal asymptote** $x = -1$, **horisontal asymptote** $y = a$ og **nullpunkt** $x = -b$. Parameteren a styrer den horisontale asymptoten (og dermed grafens nivå), mens b styrer hvor nullpunktet ligger.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.