

Matematikk 1T — Eksempelsett 2

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

Oppgavesettet er delt i tre oppgavetyper: **Type 1** (Del 1, uten hjelpemidler, oppgave 1–6), **Type 2** (Del 2, med hjelpemidler, oppgave 7–12) og **Type 3** (Del 2, med hjelpemidler, oppgave 13–14).

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave. Bestem den momentane vekstfarten til $f(x) = 4x^2 + 3x + 8$ når $x = 2$.

Løsning. Den momentane vekstfarten er den deriverte:

$$f'(x) = 8x + 3.$$

Setter vi inn $x = 2$:

$$f'(2) = 8 \cdot 2 + 3 = 16 + 3 = \boxed{19}.$$

Oppgave 2

Oppgave. Kari har regnet ut at $\sin v = 2$ for en vinkel v . Kan hun ha regnet riktig? (flervalg: Ja / Nei / Det kommer an på vinkelen)

Løsning. Sinus til en vinkel er forholdet mellom motstående katet og hypotenusen i en rettvinklet trekant, og hypotenusen er alltid den lengste siden. Derfor er

$$-1 \leq \sin v \leq 1 \quad \text{for alle vinkler } v.$$

Siden $2 > 1$, er $\sin v = 2$ umulig.

Nei

Oppgave 3

Oppgave. På enhetssirkelen ligger punktet $P(0,692, 0,722)$ på vinkelbeinet til $\angle u$. a) Bestem $\angle u$.
b) For $v \in [180^\circ, 360^\circ]$ er $\cos v = \cos u$. Bestem $\angle v$.

a) På enhetssirkelen er $P = (\cos u, \sin u)$, altså $\cos u = 0,692$ og $\sin u = 0,722$. Da er

$$u = \cos^{-1}(0,692) \approx \boxed{46,2^\circ}.$$

(Kontroll: $\sin^{-1}(0,722) \approx 46,2^\circ$ — samme svar.)

b) To vinkler har samme cosinus når de ligger symmetrisk om x -aksen: $v = -u$ eller $v = 360^\circ - u$. I intervallet $[180^\circ, 360^\circ]$ er det

$$v = 360^\circ - 46,2^\circ = \boxed{313,8^\circ}.$$

Oppgave 4

Oppgave. $f(x) = ax + 4$ og $g(x) = -ax - 4$ der $a \neq 0$. Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom grafene.

Løsning. I skjæringspunktet er $f(x) = g(x)$:

$$ax + 4 = -ax - 4 \implies 2ax = -8 \implies x = -\frac{4}{a}.$$

Setter inn i f :

$$y = a \cdot \left(-\frac{4}{a}\right) + 4 = -4 + 4 = 0.$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{a}, \quad y = 0}$$

Grafene skjærer altså alltid hverandre på x -aksen, uansett hvilken verdi a har.

Oppgave 5

Oppgave. Bestem r og s slik at $x^2 + 8x + r = (x + s)^2$ blir en identitet.

Løsning. Utvid høyresiden:

$$(x + s)^2 = x^2 + 2sx + s^2.$$

Sammenlign koeffisientene med $x^2 + 8x + r$:

- x -ledd: $2s = 8 \implies s = 4$
- konstantledd: $r = s^2 = 4^2 = 16$

$$\boxed{r = 16, \quad s = 4}$$

Oppgave 6

Oppgave. Grafen viser timelønnen (kroner) til Sarah som bokselger som funksjon av antall solgte bøker x . To punkter er markert: $(10, 300)$ og $(k, 480)$. Sarah tjener 15 kroner for hver bok hun selger. Bestem k .

Løsning. «15 kroner per bok» betyr at den rette linjen har stigningstall 15. Linjen kan skrives $y = 15x + b$. Punktet $(10, 300)$ gir

$$300 = 15 \cdot 10 + b \implies b = 300 - 150 = 150,$$

så $y = 15x + 150$. Punktet $(k, 480)$ ligger på linjen:

$$480 = 15k + 150 \implies 15k = 330 \implies k = \boxed{22}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 7

Oppgave. $h(x) = -0,0005x^3 + 0,04x^2$ er en modell for høyden (cm) til en plante x dager etter at den begynte å spire. a) Hva viser modellen om plantens vekst? b) Hvilket gyldighetsområde bør modellen ha?

a) **Hva modellen viser.** Vi deriverer for å studere veksten:

$$h'(x) = -0,0015x^2 + 0,08x = x(-0,0015x + 0,08).$$

Den deriverte (vekstfarten) er null for $x = 0$ og for

$$-0,0015x + 0,08 = 0 \implies x = \frac{0,08}{0,0015} = \frac{160}{3} \approx 53,3.$$

- For $0 < x < 53,3$ er $h'(x) > 0$: planten vokser.
- Vekstfarten er størst der $h''(x) = 0$, altså $x = \frac{80}{3} \approx 26,7$ dager (vendepunkt). Først vokser planten stadig raskere, deretter avtar vekstfarten.
- Ved $x \approx 53,3$ slutter planten å vokse; her er høyden størst:

$$h\left(\frac{160}{3}\right) \approx 37,9 \text{ cm.}$$

- For $x > 53,3$ gir modellen *avtakende* høyde — planten «krymper». Det er urealistisk.

b) **Gyldighetsområde.** Høyden kan ikke være negativ, og en plante krymper ikke. Modellen er fornuftig fra plantens spiring til den når maksimal høyde:

$$\boxed{0 \leq x \leq \frac{160}{3} \approx 53 \text{ dager}}.$$

I dette intervallet vokser planten fra 0 cm til ca. 37,9 cm.

Oppgave 8

Oppgave. En figur er satt sammen av to kvadrater (et stort og et lite, satt sammen langs en felles kant slik at de danner en vinkelfigur). Omkretsen av figuren er 16. Hvor lange må sidene i hvert kvadrat være for at arealet skal bli minst mulig?

Løsning. La det store kvadratet ha side a og det lille side b (med $a > b$). Det lille kvadratet er satt inntil det store langs en del av kanten. Vi følger omkretsen rundt figuren:

- Det store kvadratet bidrar med tre hele sider og den delen av den fjerde siden som ikke dekkes av det lille: $a + a + a + (a - b) = 4a - b$.
- Det lille kvadratet bidrar med tre sider (den fjerde ligger inntil det store): $3b$.

Samlet omkrets:

$$O = 4a - b + 3b = 4a + 2b = 16 \implies b = 8 - 2a.$$

Arealet er summen av de to kvadratene:

$$A(a) = a^2 + b^2 = a^2 + (8 - 2a)^2.$$

Vi deriverer og setter lik null:

$$A'(a) = 2a + 2(8 - 2a) \cdot (-2) = 2a - 4(8 - 2a) = 10a - 32 = 0 \implies a = 3,2.$$

Da er $b = 8 - 2 \cdot 3,2 = 1,6$. Siden $A''(a) = 10 > 0$, er dette et minimum.

$$a = 3,2 \quad \text{og} \quad b = 1,6$$

Minste areal blir $A = 3,2^2 + 1,6^2 = 10,24 + 2,56 = 12,8$.

Oppgave 9

Oppgave. Danny har løst ulikheten $x^3 > 3x^2 - 2x$ ved å dele begge sider på x . Han får $(x-1)(x-2) > 0$ og svaret $x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$. Vurder løsningen.

Vurdering. Dannys feil er at han **deler på x uten å vite om x er positiv eller negativ**. Når man deler en ulikhet på et negativt tall, må ulikhetstegnet snu — derfor er det ikke lov å dele på x når fortegnet er ukjent. Han mister også løsningen $x = 0$ fra vurderingen.

Riktig framgangsmåte. Flytt alt over på én side og faktoreriser:

$$x^3 - 3x^2 + 2x > 0 \implies x(x^2 - 3x + 2) > 0 \implies x(x-1)(x-2) > 0.$$

Nullpunktene er $x = 0, 1, 2$. Vi lager fortegnslinje for produktet $x(x-1)(x-2)$:

Intervall	x	$x-1$	$x-2$	Produkt
$x < 0$	—	—	—	—

Intervall	x	$x - 1$	$x - 2$	Produkt
$0 < x < 1$	+	-	-	+
$1 < x < 2$	+	+	-	-
$x > 2$	+	+	+	+

Produktet er positivt der det står +:

$$x \in \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

Dannys svar er altså **feil**: han har feilaktig fått med alle $x < 0$, og han har droppet intervallet $\langle 0, 1 \rangle$.

Oppgave 10

Oppgave. Tre figurer er satt sammen av små kvadrater (en «dyrefigur» med hode, kropp, bein og en trappeformet hale som vokser). a) Lag en algoritme for å bestemme hvor mange små kvadrater du totalt trenger til de **100 første** figurene. b) Lag et program ut fra algoritmen som regner ut og skriver ut svaret.

Mønster. Ved å telle kvadratene i hver figur finner vi

Figur 1: 7, Figur 2: 19, Figur 3: 37.

Differansene mellom figurene er 12 og 18 — de øker med 6 hver gang (konstant andredifferanse). Da er antallet i figur n et andregradsuttrykk $T(n) = 3n^2 + bn + c$. Med $T(1) = 7$ og $T(2) = 19$:

$$3 + b + c = 7, \quad 12 + 2b + c = 19.$$

Trekker vi den første fra den andre: $9 + b = 12 \Rightarrow b = 3$, og da $c = 1$. Altså

$$T(n) = 3n^2 + 3n + 1.$$

Kontroll: $T(3) = 27 + 9 + 1 = 37 \checkmark$ (og $T(4) = 61$). Hodet i figuren er et $n \times n$ -kvadrat, og resten (kropp, bein og trappehale) utgjør de øvrige $3n^2 + 3n + 1 - n^2 = 2n^2 + 3n + 1$ kvadratene.

a) **Algoritme.** Vi summerer $T(n)$ for $n = 1, 2, \dots, 100$:

1. Sett `total = 0`.
2. La `n` gå fra 1 til 100.
3. For hver `n`: regn ut `T = 3*n*n + 3*n + 1` og legg til: `total = total + T`.
4. Skriv ut `total`.

b) **Program (Python):**

```
total = 0
for n in range(1, 101):
    total += 3 * n * n + 3 * n + 1
print("Totalt antall kvadrater:", total) # 1030300
```

Program (C++):

```
#include <iostream>
int main() {
    long long total = 0;
    for (int n = 1; n <= 100; ++n) {
        total += 3LL * n * n + 3 * n + 1;
    }
    std::cout << "Totalt antall kvadrater: " << total << "\n"; // 1030300
    return 0;
}
```

Begge gir samme svar. Med summeformelen kan vi også kontrollere:

$$\sum_{n=1}^{100} (3n^2 + 3n + 1) = 3 \cdot \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} + 3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 100 = 1\,015\,050 + 15\,150 + 100 = 1\,030\,300.$$

1 030 300 små kvadrater

Oppgave 11

Oppgave. A og B er to punkter på parabellen $f(x) = x^2$, og en rett linje trekkes gjennom dem. Linjen skjærer y -aksen i punktet S . a) Finn en sammenheng mellom x -koordinatene til A og B og y -koordinaten til S . b) Vis at sammenhengen gjelder for alle par av punkter A og B på parabellen.

a) Avlesning fra figuren. Av figuren er $A = (-1, 1)$ og $B = (2, 4)$ (begge på $y = x^2$), og linjen skjærer y -aksen i $S = (0, 2)$.

Vi ser at $2 = -(-1) \cdot 2$, altså

$$y_S = -x_A \cdot x_B.$$

(Med $x_A = -1$ og $x_B = 2$ blir $y_S = -(-1)(2) = 2$ ✓.)

b) Bevis for alle punkter. La $A = (a, a^2)$ og $B = (b, b^2)$ være to vilkårlige punkter på parabellen. Stigningstallet til linjen gjennom dem er

$$k = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = a + b.$$

Linjen har likning $y = k(x - a) + a^2 = (a + b)(x - a) + a^2$. Skjæringen med y -aksen ($x = 0$):

$$y_S = (a + b)(0 - a) + a^2 = -a^2 - ab + a^2 = -ab.$$

Altså $y_S = -x_A \cdot x_B$ for **alle** par av punkter på parabellen.

$y_S = -x_A \cdot x_B$

Oppgave 12

Oppgave. Grafen til en funksjon f har nullpunkter $x = -4$, $x = 0$ og $x = 4$, og bunnpunkter i $(-2\sqrt{2}, -64)$ og $(2\sqrt{2}, -64)$. Tegn en fortegnslinje for f og en for f' .

Løsning. Funksjonen er av fjerde grad (formen på grafen + tre nullpunkter der $x = 0$ er et dobbelt nullpunkt). Et uttrykk som passer er

$$f(x) = x^4 - 16x^2 = x^2(x-4)(x+4),$$

som har nullpunkter $-4, 0, 4$ og bunnpunkter i $x = \pm 2\sqrt{2}$ med $f(\pm 2\sqrt{2}) = -64$. (Dette uttrykket trengs ikke for å tegne fortegnslinjene, men det bekrefter opplysningene.)

Fortegnslinje for f . Grafen ligger *under* x -aksen mellom de ytterste nullpunktene (bortsett fra at den berører aksene i $x = 0$). I $x = 0$ er det et **dobbelt** nullpunkt, så f skifter *ikke* fortegn der:

x		-4	0	4				
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

- $f > 0$ for $x < -4$ og for $x > 4$
- $f < 0$ for $-4 < x < 0$ og for $0 < x < 4$
- $f = 0$ i $x = -4, 0, 4$

Fortegnslinje for f' . f' er null i topp- og bunnpunktene. Av grafen: bunnpunkter i $x = -2\sqrt{2} \approx -2,83$ og $x = 2\sqrt{2} \approx 2,83$, og et toppunkt i $x = 0$.

x		$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- $f' < 0$ (synker) for $x < -2\sqrt{2}$ og for $0 < x < 2\sqrt{2}$
- $f' > 0$ (stiger) for $-2\sqrt{2} < x < 0$ og for $x > 2\sqrt{2}$
- $f' = 0$ i $x = -2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}$

(Kontroll med uttrykket: $f'(x) = 4x^3 - 32x = 4x(x^2 - 8)$, med nullpunkter $x = 0$ og $x = \pm 2\sqrt{2}$ ✓.)

Oppgave 13

Oppgave. Grafene til $f(x) = ax^2$ og $g(x) = \sqrt{bx}$ skjærer hverandre. For eksempel gir $a = 2$, $b = 32$ skjæringspunktet $(2, 8)$. Utforsk hvilke verdier av $a, b \in \mathbb{N}$ som gir et skjæringspunkt der **begge** koordinatene er hele tall.

Løsning. I et skjæringspunkt (med $x > 0$) er $f(x) = g(x)$:

$$ax^2 = \sqrt{bx}.$$

Vi kvadrerer begge sider:

$$a^2x^4 = bx \implies a^2x^3 = b \implies x^3 = \frac{b}{a^2}.$$

Skjæringspunktets x -koordinat blir et helt tall nettopp når $\frac{b}{a^2}$ er en kubikk av et helt tall. La $x = n$ være et naturlig tall. Da må

$$\boxed{b = a^2 n^3}, \quad \text{og da er } y = ax^2 = an^2.$$

Med denne sammenhengen er **både** $x = n$ og $y = an^2$ hele tall. Vi kan altså velge a og n fritt, og b følger av formelen:

a	n	$b = a^2 n^3$	Skjæringspunkt (n, an^2)
1	1	1	(1, 1)
1	2	8	(2, 4)
2	1	4	(1, 2)
2	2	32	(2, 8)
3	1	9	(1, 3)
3	2	72	(2, 12)

Eksempelet i oppgaven ($a = 2$, $b = 32 = 2^2 \cdot 2^3$) gir $x = 2$, $y = 2 \cdot 4 = 8$ — i samsvar med $(2, 8)$.

Konklusjon. For hver $a \in \mathbb{N}$ og hvert naturlig tall n gir $b = a^2 n^3$ et skjæringspunkt (n, an^2) med to hele koordinater. Det finnes altså uendelig mange slike par (a, b) .

Oppgave 14

Oppgave. Snøskredskolen beskriver en metode for å måle helningsvinkelen til terrenget med to skistaver: man legger en stav i fallretningen og lager et avtrykk, reiser så en stav loddrett og ser hvor den treffer i forhold til avtrykket. Regelen sier at terrenget har 30° helning hvis den loddrette staven treffer nederst i avtrykket, og at man «for hver 10 cm kan legge til eller trekke fra 3° ». Bruk trigonometri, gjør nødvendige forutsetninger og vurder metoden.

Forutsetninger. La staven ha lengde L . Vi legger en stav langs bakken i fallretningen (lengde L) og reiser så en stav loddrett ned fra håndtaket. Avstanden d fra avtrykkets nederste punkt til der den loddrette staven treffer, henger sammen med helningsvinkelen α . En enkel modell som gir 30° ved $d = 0$ er

$$\tan \alpha = \tan 30^\circ + \frac{d}{L},$$

der d måles langs bakken (positiv nedover, negativ oppover/inn i avtrykket).

Test av tommelfingerregelen. Regelen er lineær: $\alpha \approx 30^\circ + 0,3^\circ \cdot d_{\text{cm}}$ ($0,3^\circ$ per cm, dvs. 3° per 10 cm). For at modellen skal gi nettopp $0,3^\circ$ per cm rett ved 30° , kan vi finne en passende stavlengde. Med $L \approx 1$ m får vi følgende sammenligning mellom **eksakt** trigonometri og **regelen**:

d (cm)	Eksakt α	Regelen	Avvik
+10	$\approx 34,1^\circ$	33°	+1,1°
+20	$\approx 37,9^\circ$	36°	+1,9°
-20	$\approx 20,7^\circ$	24°	-3,3°

der f.eks.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\tan 30^\circ + \frac{0,10}{1}\right) = \tan^{-1}(0,577 + 0,10) \approx 34,1^\circ.$$

Vurdering.

- Sammenhengen mellom d og α er **ikke lineær** (den inneholder \tan^{-1}), så «3° per 10 cm» kan bare være en tilnærming.
- Nær 30° (små d) er tilnærmingen ganske god — avviket er rundt 1–2°.
- Lenger fra 30° blir avviket større, og det er **usymmetrisk**: regelen treffer dårligere når terrenget er slakere enn 30° enn når det er brattere.
- Resultatet avhenger dessuten av stavlengden L (og av hvor nøyaktig man klarer å måle d i snøen).

Konklusjon. Metoden er en grei, praktisk **overslagsmetode** ute i felt: den gir riktig størrelsesorden på helningen, særlig i området rundt 30° som er mest kritisk for skredfare. Men den er en lineær tilnærming til en ikke-lineær sammenheng, så for vinkler langt fra 30° bør man bruke et ordentlig hellingsmeter (klinometer) i stedet.

Metoden er en brukbar tilnærming nær 30°, men unøyaktig for vinkler langt unna.

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.