Matematikk 1T — Eksempelsett 3 (H2021)

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** oppgaven og matematikk.net sitt løsningsforslag. Sluttsvar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (Lindesnes fyr, temperatur)

Oppgave. Grafen viser temperaturen ved Lindesnes fyr x timer etter midnatt. a) Vis hvordan du kan regne ut stigningstallet til den rette linjen gjennom punktene (4, 4,7) og (14, 7,3). b) Gi en praktisk tolkning av stigningstallet.

a) Stigningstallet til en rett linje gjennom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7{,}3 - 4{,}7}{14 - 4} = \frac{2{,}6}{10} = \boxed{0{,}26}.$$

b) x måles i timer og y i grader celsius. Stigningstallet 0,26 betyr at temperaturen i gjennomsnitt **øker med** 0,26 °**C per time** i tidsrommet fra $x = 4$ til $x = 14$ (altså fra klokka 04 til klokka 14).

Oppgave 2 (rettvinklet trekant)

Oppgave. I en rettvinklet trekant ABC er AC den lengste siden, $AB = 4$ og $\tan\angle A = 1$. Bestem BC.

Løsning. Siden AC er den lengste siden, er AC hypotenusen, og den rette vinkelen ligger i B. Da er AB og BC kateter, og

$$\tan\angle A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{BC}{AB}.$$

Med $\tan\angle A = 1$ får vi

$$\frac{BC}{4} = 1 \implies \boxed{BC = 4}.$$

(Trekanten er likebeint og rettvinklet, med $\angle A = \angle C = 45°$.)

Oppgave 3 (ulikhet, to strategier)

Oppgave. Vis to ulike strategier for å løse ulikheten $x^2 - 4 < 2x - 1$.

Klargjøring. Vi samler alt på venstre side:

$$x^2 - 4 < 2x - 1 \implies x^2 - 2x - 3 < 0.$$

Nullpunktene til $x^2 - 2x - 3$ er

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \implies x = -1 \text{ eller } x = 3.$$

Strategi 1 — algebraisk (fortegnsskjema). Vi faktoriserer $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ og setter opp fortegnsskjema for faktorene:

	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
produkt	$+$	$-$	$+$

Produktet er negativt kun for $-1 < x < 3$.

Strategi 2 — grafisk. Vi tegner $y_1 = x^2 - 4$ (parabel) og $y_2 = 2x - 1$ (rett linje) i samme koordinatsystem. Ulikheten $x^2 - 4 < 2x - 1$ spør hvor **parabelen ligger lavere enn linjen**. De skjærer hverandre der $x^2 - 4 = 2x - 1$, altså i $x = -1$ og $x = 3$. Mellom disse skjæringspunktene ligger parabelen under linjen, så ulikheten er oppfylt for $-1 < x < 3$.

Begge strategier gir

$$\boxed{-1 < x < 3}$$

Oppgave 4 (tredjegradslikning)

Oppgave. Løs likningen $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

Løsning. Vi faktoriserer ved å gruppere:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - 1(x-3) = (x-3)(x^2-1) = (x-3)(x-1)(x+1).$$

Produktet er null når én av faktorene er null:

$$\boxed{x \in \{-1,\ 1,\ 3\}}$$

Oppgave 5 (programmering — andregradslikning)

Oppgave. Malin har skrevet starten på et program for andregradslikninger med $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ og diskriminanten $d = b^2 - 4ac$. a) Hva bør hun skrive i linjene 8, 10 og 12 (etter `if d < 0:`, `elif d == 0:` og `else:`)? b) Forklar hva som skjer når programmet kjøres.

a) I de tre grenene skal hun skrive ut en passende melding om antall løsninger. Diskriminanten avgjør hvor mange reelle løsninger andregradslikningen har:

```python
a = 1
b = 2
c = 1

d = b ** 2 - 4 * a * c

if d < 0:
    print("Likningen har ingen løsning.")
elif d == 0:
    print("Likningen har én løsning.")
else:
    print("Likningen har to løsninger.")
```

Samme program i C++:

```cpp
#include <iostream>
int main() {
    int a = 1, b = 2, c = 1;
    int d = b * b - 4 * a * c;
    if (d < 0)
        std::cout << "Likningen har ingen losning.\n";
    else if (d == 0)
        std::cout << "Likningen har en losning.\n";   // d = 0 her
    else
        std::cout << "Likningen har to losninger.\n";
    return 0;
}
```

b) Med $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ blir

$$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0.$$

Siden $d = 0$, hopper programmet til `elif d == 0:`-grenen og skriver ut

$$\boxed{\text{«Likningen har én løsning.»}}$$

Dette stemmer: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$ har den ene (dobbelte) løsningen $x = -1$.

Oppgave 6 (eksakt verdi for $\sin 30^\circ$)

Oppgave. Bruk en likesidet trekant (med sider a) til å bestemme en eksakt verdi for $\sin 30^\circ$.

Løsning. I en likesidet trekant er alle vinkler 60°. Vi trekker høyden fra toppen ned på grunnlinjen. Høyden

- **halverer toppvinkelen** i to vinkler på 30°, og
- **halverer grunnlinjen**, slik at den nye kateten blir $\dfrac{a}{2}$.

Vi får en rettvinklet trekant med hypotenus a (en av sidene i den likesidete trekanten) og kateten $\dfrac{a}{2}$ motstående vinkelen 30°:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{a/2}{a} = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

Oppgave 7 (andregradsfunksjon og forskyvning)

Oppgave. Grafen viser f. a) Begrunn ut fra grafen at $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Grafen forskyves slik at bunnpunktet blir $(-4, 1)$, og vi får g. b) Bestem $g(x)$.

a) Vi avleser to ting fra grafen:

- Nullpunktene er $x = -3$ og $x = -1$ (grafen skjærer x-aksen der). Da er $f(x) = a(x+3)(x+1)$.
- Grafen åpner oppover og er ganske «smal»; konstantleddet (skjæring med y-aksen) er $f(0) = 3$.

Med $a = 1$ blir $f(x) = (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$, og $f(0) = 3$ stemmer. Bunnpunktet ligger i $x = -\frac{4}{2} = -2$ med $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = -1$, altså $(-2, -1)$ — i samsvar med grafen.

$$\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 3}$$

b) g har samme form ($a = 1$), men nytt bunnpunkt $(-4, 1)$. På toppunkts-/bunnpunktsform:

$$g(x) = (x - (-4))^2 + 1 = (x+4)^2 + 1.$$

Utvider vi:

$$g(x) = x^2 + 8x + 16 + 1 = \boxed{x^2 + 8x + 17}.$$

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 1 (identitet, fullstendig kvadrat)

Oppgave. Bestem r, s og t slik at $4x^2 + 16x + r = (sx+t)^2$ blir en identitet.

Løsning. Utvid høyresiden:

$$(sx+t)^2 = s^2x^2 + 2st\,x + t^2.$$

Sammenlign med $4x^2 + 16x + r$ ledd for ledd:

- x^2-ledd: $s^2 = 4 \Rightarrow s = 2$ (vi velger positiv verdi)
- x-ledd: $2st = 16 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot t = 16 \Rightarrow t = 4$

- konstantledd: $r = t^2 = 4^2 = 16$

$$\boxed{r = 16, \quad s = 2, \quad t = 4}$$

Kontroll: $(2x+4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$. ✓

Oppgave 2 (kvadrat — eksakt sidekant)

Oppgave. I et kvadrat er diagonalen én enhet lengre enn sidekanten. Bestem den eksakte lengden til sidekanten.

Løsning. La sidekanten være x. Diagonalen i et kvadrat er $x\sqrt{2}$ (Pytagoras: $\sqrt{x^2 + x^2}$). Vilkåret «diagonalen er én enhet lengre enn sidekanten» gir

$$x\sqrt{2} = x + 1.$$

Vi løser for x:

$$x\sqrt{2} - x = 1 \implies x(\sqrt{2} - 1) = 1 \implies x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Rasjonaliser nevneren ved å multiplisere med $\sqrt{2} + 1$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \boxed{\sqrt{2} + 1}.$$

(Tilnærmet $x \approx 2{,}41$ enheter.)

Oppgave 3 (programmering — nullpunkter ved fortegnsskifte)

Oppgave. Monica har et program der $f(x) = x^2 - 2$, og en `while`-løkke går fra $a = -2$ med steg $e = 0{,}01$ og skriver ut «Jeg har funnet et nullpunkt.» hver gang $f(a) \cdot f(a+e) \leq 0$. a) Forklar og begrunn resultatet når programmet kjøres. b) Utvid programmet slik at det skriver ut tilnærmede nullpunkter med fire desimalers nøyaktighet.

a) Funksjonen $f(x) = x^2 - 2$ har nullpunktene $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4142$. Produktet $f(a) \cdot f(a+e)$ er **negativt (eller null)** nettopp når f skifter fortegn mellom a og $a + e$ — altså når det ligger et nullpunkt i intervallet $[a,\, a+e]$.

Løkka teller a oppover fra -2 til (men ikke med) 2, og passerer begge nullpunktene $-\sqrt{2}$ og $\sqrt{2}$ (begge ligger i $(-2,\, 2)$). Derfor blir teksten **«Jeg har funnet et nullpunkt.» skrevet ut to ganger** — én gang nær $x = -\sqrt{2}$ og én gang nær $x = \sqrt{2}$. Programmet sier *at* det finnes nullpunkter, men ikke *hvor* de er.

b) Vi forteller hvor nullpunktet er ved å skrive ut midtpunktet $a + \frac{e}{2}$ i intervallet der fortegnet skifter, og setter steglengden liten ($e = 0{,}0001$) for fire desimalers nøyaktighet:

```python
def f(x):
    return x ** 2 - 2          # Definerer funksjonen f(x) = x^2 - 2

a = -2
e = 0.0001

while a < 2:
    if f(a) * f(a + e) <= 0:
        print(f"Nullpunkt nær x = {a + e/2:.4f}")
    a = a + e

# Utskrift:
# Nullpunkt nær x = -1.4143
# Nullpunkt nær x = 1.4142
```

Samme program i C++:

```cpp
#include <iostream>
#include <iomanip>
double f(double x) { return x * x - 2; }   // f(x) = x^2 - 2
int main() {
    double a = -2, e = 0.0001;
    while (a < 2) {
        if (f(a) * f(a + e) <= 0)
            std::cout << "Nullpunkt naer x = "
                      << std::fixed << std::setprecision(4)
                      << a + e / 2 << "\n";
        a = a + e;
    }
    return 0;
}
// Utskrift:
// Nullpunkt naer x = -1.4143
// Nullpunkt naer x = 1.4142
```

$$\boxed{x \approx -1{,}4143 \quad \text{og} \quad x \approx 1{,}4142 \;\; (\approx \pm\sqrt{2})}$$

Oppgave 4 (tangenter parallelle med en linje)

Oppgave. $f(x) = x^3 - x - 1$. Grafen har to tangenter som er parallelle med linjen $y = \frac{1}{2}x + 2$. Bestem en eksakt verdi for nullpunktet (skjæringen med x-aksen) til hver av disse tangentene.

Løsning. Parallelle linjer har samme stigningstall, så tangentene har stigningstall $\frac{1}{2}$. Vi finner berøringspunktene ved å løse $f'(x) = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = \tfrac{1}{2} \implies 3x^2 = \tfrac{3}{2} \implies x^2 = \tfrac{1}{2} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Berøringspunktene (med $f(x) = x^3 - x - 1$):

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4} - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - 1,$$

$$f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \quad \text{(ved symmetri, motsatt fortegn på } x^3 \text{ og } x\text{)}.$$

Tangentlinjene har formen $y = \frac{1}{2}(x - x_0) + f(x_0)$. Vi regner ut og forenkler hver av dem:

- I $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$
- I $x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$

Nullpunktene finner vi ved å sette $y = 0$ i hver tangentlikning og løse for x:

Tangent 1 ($x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$): $\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} + 2.$

Tangent 2 ($x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$): $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}.$

$$\boxed{x = 2 + \sqrt{2} \quad \text{og} \quad x = 2 - \sqrt{2}}$$

(Tilnærmet $x \approx 3{,}41$ og $x \approx 0{,}59$.)

> *Kontrollert med CAS (sympy):* berøringspunktene $x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tangentene $y = \frac{1}{2}x - 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$, og nullpunktene $2 \pm \sqrt{2}$.

Oppgave 5 (modellering — avkjøling av blåbærgelé)

Oppgave. En blåbærgelé kjøles i et rom på 20 °C. Tabellen gir temperaturen x minutter etter avkjølingsstart. Stine lager en ny tabell med (Temperatur −20). a) Lag en modell $T(x) = a \cdot b^x + 20$. b) Hvilket gyldighetsområde kan modellen ha?

a) Når vi trekker fra romtemperaturen 20, blir overtemperaturen $T(x) - 20 = a \cdot b^x$ en ren eksponentialfunksjon. Vi gjør **eksponentiell regresjon** på den nye tabellen (par (x, Temperatur − 20) med $x = 4, 8, 16, \ldots, 90$). Med digitalt verktøy (regresjon) får vi

$$a \approx 75{,}05, \qquad b \approx 0{,}985.$$

$$\boxed{T(x) = 75{,}05 \cdot 0{,}985^{\,x} + 20}$$

Modellen passer svært godt; for eksempel gir den $T(20) \approx 75{,}4$ og $T(90) \approx 39{,}2$, i samsvar med tabellen. Faktoren $b \approx 0{,}985$ betyr at **overtemperaturen synker med ca.** $1{,}5\,\%$ **per minutt**.

b) Modellen gjelder fra avkjølingen starter, altså for $x \geq 0$. Den har ingen øvre tidsgrense matematisk (den nærmer seg 20 °C, som er fysisk riktig — geléen kan ikke bli kaldere enn rommet). Et rimelig gyldighetsområde er derfor

$$\boxed{x \geq 0 \text{ (minutter)}},$$

i praksis fra start til geléen i praksis har nådd romtemperatur. Modellen bør ikke brukes for $x < 0$ (før avkjølingen begynte), og den gir aldri temperatur under 20 °C.

Oppgave 6 (derivert ut fra tangenter i graf)

Oppgave. Figuren viser grafen til en tredjegradsfunksjon f sammen med tangenter i tre punkter (to vannrette tangenter og én bratt synkende). Bruk tangentene til å bestemme et uttrykk for f'.

Avlesning fra grafen.

- Grafen har et **toppunkt** der $x = -1$ (verdien $y \approx 6$). Tangenten der er **vannrett**, så $f'(-1) = 0$.
- Grafen har et **bunnpunkt** der $x = 1$ (verdien $y \approx 2$). Tangenten der er også **vannrett**, så $f'(1) = 0$.
- Den tredje (bratt synkende) tangenten ligger i **vendepunktet** $x = 0$. Den har stigningstall -3, så $f'(0) = -3$.

Bestemmelse av f'. f er en tredjegradsfunksjon, så f' er en andregradsfunksjon. De to vannrette tangentene gir nullpunktene $x = -1$ og $x = 1$ til f':

$$f'(x) = k\,(x + 1)(x - 1) = k\,(x^2 - 1).$$

Vi bruker $f'(0) = -3$ til å finne k:

$$f'(0) = k(0 - 1) = -k = -3 \implies k = 3.$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}$$

(Da er $f(x) = x^3 - 3x + 4$, med toppunkt $(-1, 6)$, bunnpunkt $(1, 2)$ og vendepunkt $(0, 4)$ — i samsvar med figuren.)

Oppgave 7 (programmering — fyrstikkfigurer)

Oppgave. Figur n er et $n \times n$-rutenett av små kvadrater laget av fyrstikker (figur 1: 1 kvadrat, figur 2: 4 kvadrater, figur 3: 9 kvadrater). Du har 10 000 fyrstikker og lager én figur i hver størrelse etter samme mønster. a) Hvor mange figurer kan du lage? b) Hvor mange fyrstikker har du igjen etter den siste?

Mønster. I et $n \times n$-rutenett er det $(n + 1)$ vannrette linjer med n fyrstikker hver, og $(n + 1)$ loddrette linjer med n fyrstikker hver:

$$F(n) = 2\,n(n + 1).$$

Kontroll: $F(1) = 4$, $F(2) = 12$, $F(3) = 24$ — stemmer med figurene.

Antall fyrstikker brukt på de N første figurene til sammen:

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N} 2n(n+1) = \frac{2N(N+1)(N+2)}{3}.$$

Vi lager figurer så lenge vi har nok fyrstikker. Det enkleste er et program som legger til figurer til lageret tar slutt:

```
total = 10000
brukt = 0
n = 0
while brukt + 2 * (n + 1) * (n + 2) <= total:
    n += 1
    brukt += 2 * n * (n + 1)
print("Antall figurer:", n)      # 23
print("Fyrstikker brukt:", brukt)    # 9200
print("Fyrstikker igjen:", total - brukt)   # 800
```

Samme program i C++:

```
#include <iostream>
int main() {
    int total = 10000, brukt = 0, n = 0;
    while (brukt + 2 * (n + 1) * (n + 2) <= total) {
        n += 1;
        brukt += 2 * n * (n + 1);
    }
    std::cout << "Antall figurer: " << n << "\n";          // 23
    std::cout << "Fyrstikker brukt: " << brukt << "\n";    // 9200
    std::cout << "Fyrstikker igjen: " << total - brukt << "\n"; // 800
    return 0;
}
```

a) Programmet gir at vi kan lage de $\boxed{23}$ første figurene (figur 24 ville krevd $2 \cdot 24 \cdot 25 = 1200$ til, men vi har bare 800 igjen).

b) Brukt: $S(23) = \dfrac{2 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{3} = 9200$ fyrstikker. Igjen:

$$10\,000 - 9200 = \boxed{800 \text{ fyrstikker}}.$$

Merk (avvik fra matematikk.net-fasiten). Fasiten hos matematikk.net oppgir «70 figurer» og «60 fyrstikker til overs». Det stemmer ikke med oppgaveteksten: «figur 2 består av fire små kvadrater» er et 2×2-rutenett, som krever **12** fyrstikker (ikke 8) — det indre korset utgjør 4 av dem. Riktig formel er derfor $F(n) = 2n(n+1)$ (med $F(1) = 4$, $F(2) = 12$, $F(3) = 24$, i samsvar med figurene), som gir **23 figurer og 800 fyrstikker til overs**. Fasitens 70/60 svarer til den feilaktige formelen $F(n) = 4n$.

Oppgave 8 (utforsking — helningsvinkel med skistaver)

Oppgave. Snøskredskolen (varsom.no) beskriver en metode for å anslå helningsvinkelen i terrenget med to skistaver: legg én stav i fallretningen (avtrykk = stavlengden), reis den opp i øvre kant, hold den andre staven loddrett (i lodd) inntil den berører snøen, og merk hvor den treffer avtrykket. Tommelfingerregelen: «treffer den nederst i avtrykket → 30°; for hver 10 cm utenfor/innenfor legges til/trekkes fra 3°». Skistaver er typisk 1,0–1,4 m. Bruk trigonometri og lag en systematisk oversikt over hvor nøyaktig metoden er.

Dette er den åpne, utforskende oppgaven. Jeg stiller spørsmålet: **Hvor godt stemmer tommelfingerregelen «3° per 10 cm» med den eksakte vinkelen, og hva betyr stavlengden?**

Geometrisk modell. La L være stavlengden (cm). Vi modellerer forenklet ved å bruke den nedlagte staven (lengde L) som hosliggende katet, mens den loddrette staven måler den loddrette forskyvningen d cm i forhold til referansepunktet. (En helt nøyaktig modell må ta hensyn til at avtrykket ligger *langs* skråningen og ikke vannrett; jeg kommer tilbake til dette forbeholdet til slutt.) Med denne modellen tilfredsstiller den eksakte helningsvinkelen v

$$\tan v = \frac{d}{L}.$$

Referansen er kalibrert slik at vinkelen er 30° når staven treffer **nederst i avtrykket**, altså ved $d_0 = L \tan 30^\circ$. En forskyvning på $+\Delta$ cm (nedenfor avtrykket) gir da

$$v_{\text{eksakt}} = \arctan\left(\frac{L \tan 30^\circ + \Delta}{L}\right),$$

mens tommelfingerregelen sier

$$v_{\text{regel}} = 30^\circ + 3^\circ \cdot \frac{\Delta}{10\,\text{cm}}.$$

Systematisk oversikt (eksakt vinkel, med regelens verdi i parentes, for tre vanlige stavlengder):

Forskyvning Δ	$L = 100$ cm	$L = 120$ cm	$L = 140$ cm
-20 cm	20,7° (24°)	22,3° (24°)	23,5° (24°)
-10 cm	25,5° (27°)	26,3° (27°)	26,8° (27°)
0 cm	30,0° (30°)	30,0° (30°)	30,0° (30°)
$+10$ cm	34,1° (33°)	33,5° (33°)	33,0° (33°)
$+20$ cm	37,9° (36°)	36,6° (36°)	35,8° (36°)

Vurdering av gyldighet.

- **Ved** 30° (forskyvning 0) stemmer regelen alltid eksakt — den er kalibrert der.
- **Lange staver er nøyaktigst.** Innenfor ±20 cm er det største avviket bare ca. ±0,6° for $L = 140$ cm, ca. ±1,7° for $L = 120$ cm og opptil ca. ±3° for $L = 100$ cm. Grunnen er at samme forskyvning Δ tilsvarer en mindre vinkelendring når staven (radien) er lengre.
- **Avviket vokser jo lenger fra** 30° **man kommer**, fordi tan ikke er lineær; regelens rette linje passer best nær kalibreringspunktet.

$\boxed{\text{Regelen er god nær } 30^\circ \text{ og for lange staver } (\sim 140 \text{ cm} : \text{avvik} < 1^\circ \text{ ved } \pm 20 \text{ cm}); \text{ den blir mer unøyaktig for kor}}$

Forbehold: Den eksakte tallverdien avhenger av hvordan man tolker oppsettet (hvilken stav som er hosliggende, og om forskyvningen måles langs snøen eller vannrett). Konklusjonen er likevel robust: regelen er en lineær tilnærming som er nøyaktig ved 30°, blir bedre med lengre staver, og dårligere langt fra 30°.
