

Matematikk 1T — Januar 2012

Løsningsforslag (Del 1 og Del 2)

Om dette løsningsforslaget. Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Oppgaveteksten er ikke gjengitt i sin helhet; hver oppgave vises med nummer og et kort sammendrag. **Kilde:** [oppgaven](#) og [matematikk.net sitt løsningsforslag](#). Slutt svar er sammenholdt med matematikk.net sin versjon — se den ved tvil.

DEL 1 — Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (14 poeng)

a) Forenkle $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25}$

Løsning. Vi faktoriserer teller og nevner. Telleren er en konjugatsetning, og nevneren er et fullstendig kvadrat:

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)^2} = \boxed{\frac{x - 5}{x + 5}}.$$

(Gyldig for $x \neq -5$.)

b) Løs likningen $3^{2x-1} = 1$

Løsning. Vi skriver $1 = 3^0$. Når grunntallene er like, må eksponentene være like:

$$3^{2x-1} = 3^0 \implies 2x - 1 = 0 \implies \boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

c) Forenkle $\frac{a^{1/4} \cdot \sqrt{a}}{(a^{3/4})^3 \cdot a^{-2}}$

Løsning. Vi samler potensene i teller og nevner hver for seg. I telleren er $\sqrt{a} = a^{1/2}$:

$$\text{teller} = a^{1/4} \cdot a^{1/2} = a^{1/4+1/2} = a^{3/4}.$$

I nevneren er $(a^{3/4})^3 = a^{9/4}$, så

$$\text{nevner} = a^{9/4} \cdot a^{-2} = a^{9/4-2} = a^{1/4}.$$

Brøken blir

$$\frac{a^{3/4}}{a^{1/4}} = a^{3/4-1/4} = a^{1/2} = \boxed{\sqrt{a}}.$$

d) Høyden h i trekant ABC

Oppgave. I trekant ABC er $AB = 5,0$, $AC = 3,0$ og $BC = 4,0$. Bestem høyden h fra C ned på AB ved regning.

Løsning. Sidene er 3, 4 og 5, og siden $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, er trekanten rettvinklet med rett vinkel i C (jf. figuren). Arealet kan da regnes på to måter — med de to katetene, og med grunnlinje AB og høyde h :

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h \implies \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 4,0 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot h.$$

Dermed er $6 = 2,5h$, så

$$h = \frac{3,0 \cdot 4,0}{5,0} = \frac{12}{5} = \boxed{2,4}.$$

e) Løs ulikhetene grafisk

Oppgave. I koordinatsystemet er f den blå parabelen (nullpunkter i $x = 1$ og $x = 3$, gjennom $(0, 3)$) og g den røde rette linjen (gjennom $(-3, 0)$, $(0, 3)$ og $(5, 8)$). Løs 1) $f(x) \leq 0$ og 2) $f(x) > g(x)$.

Løsning. Vi leser av grafene.

1) $f(x) \leq 0$ der parabellen ligger på eller under x -aksen, altså mellom nullpunktene:

$$\boxed{1 \leq x \leq 3}.$$

2) $f(x) > g(x)$ der den blå parabellen ligger over den røde linjen. Grafene skjærer hverandre i $(0, 3)$ og $(5, 8)$, og parabellen ligger over linjen *utenfor* skjæringspunktene:

$$\boxed{x < 0 \text{ eller } x > 5}.$$

Merk (avvik fra matematikk.net-fasiten). Den offisielle fasiten oppgir i 1e-1) $x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup [3, \rightarrow)$. Dette er feil: figuren viser at parabellen f vender den hule siden **opp** (bunnpunkt nær $(2, -1)$, gjennom $(0, 3)$), så $f(x) \leq 0$ gjelder *mellom* nullpunktene, altså $1 \leq x \leq 3$. Fasitens eget svar i 1e-2) ($f > g$ for $x < 0$ eller $x > 5$) forutsetter nettopp en parabel som åpner oppover, og er dermed selvmotsigende med fasitens 1e-1). Vårt svar $1 \leq x \leq 3$ er korrekt.

f) Bestem AC

Oppgave. I trekant ABC er $\angle A = 90^\circ$, $AB = 3,0$ og $\tan C = 2$. Bestem AC .

Løsning. Med rett vinkel i A er AB og AC kateter, og vinkel C ligger ved hjørnet C . Da er

$$\tan C = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{AB}{AC} = \frac{3,0}{AC} = 2.$$

Løser vi for AC :

$$AC = \frac{3,0}{2} = \boxed{1,5}.$$

g) Sannsynlighet — trekke to tusjer

Oppgave. Line har 3 blå, 2 røde og 1 grønn tusj (6 til sammen) og trekker tilfeldig 2. Finn 1) $P(\text{ikke grønn})$ og 2) $P(\text{én blå og én rød})$.

Løsning. Antall måter å trekke 2 av 6 (uten rekkefølge):

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

1) «Ikke grønn» betyr at begge trekkes blant de 5 ikke-grønne tusjene:

$$P(\text{ikke grønn}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

2) Én blå (av 3) og én rød (av 2):

$$P(1 \text{ blå og } 1 \text{ rød}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

h) Den deriverte fra definisjonen

Oppgave. $f(x) = x^2 + 1$. Vis ved definisjonen av den deriverte at $f'(x) = 2x$.

Løsning. Definisjonen er

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi regner ut telleren:

$$f(x+h) - f(x) = [(x+h)^2 + 1] - [x^2 + 1] = x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 = 2xh + h^2.$$

Da blir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Lar vi $h \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \boxed{2x}.$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen er $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

a) Vis at grafen ikke har nullpunkter

Løsning. Vi undersøker diskriminanten til $-x^2 + 2x - 2 = 0$. Med $a = -1$, $b = 2$, $c = -2$:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4.$$

Siden $D = -4 < 0$ har likningen ingen reelle løsninger. Grafen til f har derfor **ingen nullpunkter**. ■

b) Ekstremalpunkt ved hjelp av $f'(x)$, og tegn grafen

Løsning. Vi deriverer:

$$f'(x) = -2x + 2.$$

Ekstremalpunkt der $f'(x) = 0$:

$$-2x + 2 = 0 \implies x = 1.$$

Funksjonsverdien er $f(1) = -1 + 2 - 2 = -1$. Siden $a = -1 < 0$ vender parabelen ned, så dette er et **toppunkt**:

$$\boxed{(1, -1)}.$$

Graf. Parabelen vender den hule siden ned, har toppunkt i $(1, -1)$ og skjærer y -aksen i $f(0) = -2$. Den ligger i sin helhet under x -aksen (ingen nullpunkter), symmetrisk om linjen $x = 1$. Et par punkter til hjelp ved tegning: $f(0) = f(2) = -2$ og $f(-1) = f(3) = -5$.

c) Likning for tangenten i $(2, -2)$

Løsning. Stigningstallet til tangenten er $f'(2)$:

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2.$$

Tangenten går gjennom $(2, -2)$ med stigningstall -2 . Ettpunktsformelen gir

$$y - (-2) = -2(x - 2) \implies y + 2 = -2x + 4 \implies \boxed{y = -2x + 2}.$$

Oppgave 3 (4 poeng)

Tilnærmet regel: $F = 2C + 30$. Nøyaktig regel: $5F = 9C + 160$.

a) Gjør om 100°C , og finn differansen

Løsning.

Tilnærmet: $F = 2 \cdot 100 + 30 = \boxed{230^\circ\text{F}}$.

Nøyaktig: $5F = 9 \cdot 100 + 160 = 1060 \Rightarrow F = \frac{1060}{5} = \boxed{212^\circ\text{F}}$.

Differansen er

$$230 - 212 = \boxed{18^\circ\text{F}}.$$

Den tilnærmede regelen gir altså 18°F for mye ved 100°C .

b) Løs likningssystemet, og tolk svaret

Løsning. Vi setter $F = 2C + 30$ inn i $5F = 9C + 160$:

$$5(2C + 30) = 9C + 160 \Rightarrow 10C + 150 = 9C + 160 \Rightarrow C = 10.$$

Da blir $F = 2 \cdot 10 + 30 = 50$. Løsningen er

$$\boxed{C = 10, \quad F = 50}.$$

Tolkning. De to reglene gir nøyaktig samme svar bare ved $C = 10^\circ$ (der $F = 50^\circ$). For alle andre temperaturer er den tilnærmede regelen unøyaktig, og avviket vokser jo lenger unna 10°C vi kommer.

DEL 2 — Med hjelpemidler

Oppgave 4 (8 poeng)

a) Vis at trekanten med sider 4, 5, 6 ikke er rettvinklet

Løsning. I en rettvinklet trekant gjelder Pytagoras med den lengste siden som hypotenus. Vi sjekker 6^2 mot $4^2 + 5^2$:

$$6^2 = 36, \quad 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41.$$

Siden $36 \neq 41$, er Pytagoras ikke oppfylt, og trekanten er **ikke rettvinklet**. ■

b) Bestem arealet

Løsning. Vi finner først en vinkel med cosinussetningen. La C være vinkelen mellom sidene 4 og 5 (motstående side 6):

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos C \implies 36 = 41 - 40 \cos C \implies \cos C = \frac{5}{40} = 0,125.$$

Da er $C = \cos^{-1}(0,125) \approx 82,82^\circ$, og arealet blir

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin C \approx 10 \cdot \sin 82,82^\circ \approx \boxed{9,9 \text{ cm}^2}.$$

Kontroll med Herons formel ($s = \frac{4+5+6}{2} = 7,5$):

$$A = \sqrt{s(s-4)(s-5)(s-6)} = \sqrt{7,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5} \approx 9,92 \text{ cm}^2. \checkmark$$

c) Største mulige areal med sider 7 og 11

Løsning. Med to faste sider $a = 7$ og $b = 11$ og mellomliggende vinkel v er

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 11 \cdot \sin v = 38,5 \sin v.$$

Dette er størst når $\sin v$ er størst, altså når $\sin v = 1$, dvs. $v = 90^\circ$:

$$A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 1 = \boxed{38,5 \text{ cm}^2}.$$

Det største arealet får vi når trekanten er rettvinklet med de to gitte sidene som kateter.

d) Hvordan trekanten kan se ut hvis arealet er 30 cm^2

Løsning. Vi krever $A = 30$:

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 11 \cdot \sin v = 30 \implies \sin v = \frac{60}{77} \approx 0,779.$$

Dette gir to mulige vinkler:

$$v_1 \approx 51,2^\circ \quad \text{eller} \quad v_2 \approx 128,8^\circ.$$

Begge gir areal 30 cm^2 , men ulik trekant. Den tredje siden c finnes med cosinussetningen ($c^2 = 7^2 + 11^2 - 2 \cdot 7 \cdot 11 \cos v = 170 - 154 \cos v$):

- **Spiss vinkel** $v_1 \approx 51,2^\circ$: $c^2 \approx 170 - 154 \cdot 0,626 \approx 73,5 \implies c \approx 8,6 \text{ cm}$.
- **Stump vinkel** $v_2 \approx 128,8^\circ$: $c^2 \approx 170 + 154 \cdot 0,626 \approx 266,5 \implies c \approx 16,3 \text{ cm}$.

$$\boxed{v \approx 51,2^\circ (c \approx 8,6 \text{ cm}) \quad \text{eller} \quad v \approx 128,8^\circ (c \approx 16,3 \text{ cm})}$$

Oppgave 5 (4 poeng)

Sylinder med $d + h = 6$ og radius x , så $d = 2x$ og $h = 6 - 2x$.

a) Vis at $V(x) = 6\pi x^2 - 2\pi x^3$

Løsning. Volumet av en sylinder er $V = \pi r^2 h$. Med $r = x$ og $h = 6 - 2x$:

$$V(x) = \pi x^2(6 - 2x) = \boxed{6\pi x^2 - 2\pi x^3}, \quad x \in \langle 0, 3 \rangle.$$

(Vi må ha $x > 0$ og $h = 6 - 2x > 0$, altså $x < 3$.) ■

b) Vis at det største volumet er nøyaktig 8π

Løsning. Vi deriverer og setter $V'(x) = 0$:

$$V'(x) = 12\pi x - 6\pi x^2 = 6\pi x(2 - x).$$

$$V'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

Bare $x = 2$ ligger i $\langle 0, 3 \rangle$. For $0 < x < 2$ er $V'(x) > 0$, og for $2 < x < 3$ er $V'(x) < 0$, så $x = 2$ gir et **maksimum**. Volumet der:

$$V(2) = 6\pi \cdot 2^2 - 2\pi \cdot 2^3 = 24\pi - 16\pi = \boxed{8\pi}.$$

Det største volumet er altså nøyaktig 8π (volumenheter). ■

Oppgave 6 (8 poeng)

$F(x) = 6000 \cdot 0,864^x$, $x \in [0, 24]$, antall liter olje igjen x timer etter at lekkasjen startet.

a) Olje før lekkasjen, og prosent som lekker ut per time

Løsning. Før lekkasjen er $x = 0$:

$$F(0) = 6000 \cdot 0,864^0 = \boxed{6000 \text{ liter}}.$$

Vekstfaktoren per time er $0,864$. Dette svarer til en endring på $0,864 - 1 = -0,136$, altså en nedgang på

$$\boxed{13,6\% \text{ per time}}.$$

b) Tegn grafen til F

Løsning. Grafen er en avtagende eksponentialkurve fra $(0, 6000)$ som faller mot 0 . Noen punkter:

x (timer)	0	5	10	15	24
$F(x)$ (liter)	6000	≈ 2889	≈ 1391	≈ 670	≈ 180

Kurven er bratt i starten og flater ut mot høyre (typisk eksponentielt forfall).

c) Når har halvparten lekket ut?

Løsning. Halvparten igjen betyr $F(x) = 3000$:

$$6000 \cdot 0,864^x = 3000 \implies 0,864^x = 0,5.$$

Vi tar logaritmen på begge sider:

$$x = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,864} \approx \boxed{4,7 \text{ timer}}.$$

d) Momentan vekstfart etter to timer

Løsning. Vi tilnærmer den momentane vekstfarten $F'(2)$ med en liten endring rundt $x = 2$ (numerisk derivasjon, f.eks. på lommeregner/CAS):

$$F'(2) \approx \frac{F(2,001) - F(1,999)}{0,002} \approx -655 \text{ liter/time.}$$

$$\boxed{F'(2) \approx -655 \text{ liter per time}}$$

Merk. Den offisielle fasiten oppgir 656 liter/time. Eksakt er $F'(2) = 6000 \cdot 0,864^2 \cdot \ln 0,864 \approx -654,8$, som avrundes til -655 . Vårt svar er den mest nøyaktige avrundingen.

Tolkning. To timer etter at lekkasjen startet, lekker det ut olje med en fart på ca. 655 liter per time i akkurat det øyeblikket. Det negative fortegnet viser at oljemengden i tanken minker.

Oppgave 7 (6 poeng)

Svingetid: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, med $g \approx 9,81$.

a) Løs formelen med hensyn på L

Løsning. Vi kvadrerer begge sider og løser for L :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \implies T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{L}{g} \implies \boxed{L = \frac{gT^2}{4\pi^2}}.$$

b) Lengde slik at $T = 1,0$ s

Løsning. Setter inn $T = 1,0$ og $g = 9,81$:

$$L = \frac{9,81 \cdot 1,0^2}{4\pi^2} \approx \frac{9,81}{39,48} \approx \boxed{0,25 \text{ m}}.$$

c) Bestem g på forsøksstedet

Løsning. Pendelen svingte 1000 ganger på 6345 s, så én svingetid er

$$T = \frac{6345}{1000} = 6,345 \text{ s}.$$

Vi løser formelen med hensyn på g (fra a): $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$, med $L = 10,00$ m:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 10,00}{6,345^2} \approx \frac{394,78}{40,26} \approx \boxed{9,806}.$$

Oppgave 8 (6 poeng)

Norge: ca. 5 000 000 innbyggere, ca. 300 000 i Sør-Trøndelag.

a) Sannsynlighet for at en tilfeldig person bor i Sør-Trøndelag

Løsning.

$$p = \frac{300\,000}{5\,000\,000} = \frac{3}{50} = \boxed{0,06}.$$

b) Forklar at dette er et binomisk forsøk

Løsning. Vi trekker 10 personer og teller hvor mange som bor i Sør-Trøndelag. Et binomisk forsøk krever:

1. **Fast antall delforsøk:** $n = 10$ personer trekkes.
2. **To utfall** i hvert delforsøk: personen bor i Sør-Trøndelag (suksess) eller ikke.
3. **Konstant suksessannsynlighet:** $p = 0,06$ for hver trekning.
4. **Uavhengige delforsøk:** utfallet for én person påvirker ikke de andre.

Strengt tatt trekker vi uten tilbakelegging, men siden befolkningen er så stor (5 millioner) endres p nesten ikke fra trekning til trekning. Forsøket kan derfor svært godt tilnærmes med en binomisk modell, $X \sim \text{Bin}(10, 0,06)$. ■

c) Sannsynlighet for at ingen av de 10 bor i Sør-Trøndelag

Løsning.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,06^0 0,94^{10} = 0,94^{10} \approx \boxed{0,539}.$$

d) Sannsynlighet for at minst 3 av de 10 bor i Sør-Trøndelag

Løsning. Vi bruker komplementet:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2).$$

Med $\binom{10}{k} 0,06^k 0,94^{10-k}$:

$$P(X = 0) \approx 0,5386, \quad P(X = 1) \approx 0,3438, \quad P(X = 2) \approx 0,0988.$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (0,5386 + 0,3438 + 0,0988) \approx 1 - 0,9812 = \boxed{0,0188} \quad (\approx 1,88\%).$$

Programmering (frivillig hjelpemiddel). Sannsynlighetene i c) og d) kan også regnes med et kort program. Begge programmene gir samme svar.

Python:

```
from math import comb
p = 0.06
def binom(k):
    return comb(10, k) * p**k * (1 - p)**(10 - k)
print("P(X=0) =", round(binom(0), 4))          # 0.5386
print("P(X>=3) =", round(1 - sum(binom(k) for k in range(3)), 4)) # 0.0188
```

C++:

```
#include <iostream>
#include <cmath>
long long komb(int n, int k) {                // binomialkoeffisient
    long long r = 1;
    for (int i = 1; i <= k; ++i) r = r * (n - k + i) / i;
    return r;
}
double binom(int k) {
    double p = 0.06;
    return komb(10, k) * std::pow(p, k) * std::pow(1 - p, 10 - k);
}
int main() {
    std::cout << "P(X=0) = " << binom(0) << "\n";          // 0.5386
    double s = binom(0) + binom(1) + binom(2);
    std::cout << "P(X>=3) = " << 1 - s << "\n";          // 0.0188
    return 0;
}
```

Oppgave 9 (4 poeng)

$f(x) = a(x - b)^2 + c$, der a, b, c er reelle tall ($a \neq 0$).

a) Bestem c slik at grafen har nøyaktig ett nullpunkt uansett a og b

Løsning. Funksjonen er skrevet på toppunktform: toppunktet/bunnpunktet ligger i (b, c) . Et nullpunkt betyr $f(x) = 0$:

$$a(x - b)^2 + c = 0 \implies (x - b)^2 = -\frac{c}{a}.$$

Dette har **nøyaktig én** løsning bare når høyresiden er 0, dvs. $(x - b)^2 = 0$, som krever $c = 0$. Da er $x = b$ det eneste nullpunktet, uansett verdi på a og b :

$$\boxed{c = 0}.$$

Geometrisk: ekstremalpunktet (b, c) må ligge på x -aksen, og det skjer nettopp når $c = 0$.

b) Bestem b slik at grafen har ekstremalpunkt i $x = 3$ uansett a og c

Løsning. Toppunktformen $f(x) = a(x - b)^2 + c$ har alltid ekstremalpunkt der $(x - b)^2$ er minst, altså i $x = b$. (Tilsvarende: $f'(x) = 2a(x - b) = 0$ gir $x = b$.) For at ekstremalpunktet skal ligge i $x = 3$ må derfor

$$\boxed{b = 3},$$

uavhengig av a og c .

Uoffisielt, automatisk generert løsningsforslag. Kilde og fasit: matematikk.net. Ikke tilknyttet Utdanningsdirektoratet.